

Certificats de calcul différentiel et calcul intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 568-572

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__568_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET CALCUL INTÉGRAL.**

Nancy.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère l'intégrale curviligne*

$$I = \int (y^2 + z^2) dx + (z^2 + x^2) dy,$$

prise le long d'une courbe (C) partant de l'origine des coordonnées et aboutissant au point (x, y); z désigne une fonction de x et y.

Déterminer la fonction z la plus générale telle que l'intégrale I ne dépende pas de la courbe (C), mais seulement de son extrémité (x, y). Déterminer, en particulier, parmi toutes ces fonctions, celle qui se réduit à y² pour x = 0. Calculer la valeur de l'intégrale curviligne I correspondante.

II. *On considère en coordonnées rectangulaires la surface dont l'équation est*

$$z = \frac{x^2 - y^2}{2a}.$$

Calculer l'aire de la portion de cette surface qui se projette sur le plan des xy à l'intérieur de la courbe dont

l'équation en coordonnées polaires rapportée à Ox comme axe polaire est

$$r = a \sqrt{\cos \theta}.$$

III. On considère la surface représentée par l'équation

$$(1) \quad zx^2 - py^2 = 0,$$

où p est une constante.

1° Déterminer sur cette surface le lieu des points où la normale fait un angle donné avec Oz.

2° Déterminer sur la surface une courbe telle qu'en chacun de ses points le plan formé par la tangente à la courbe et la normale à la surface soit parallèle à Oz.

3° Trajectoires orthogonales aux surfaces représentées par l'équation (1) quand p varie.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x \cos \varphi + x^2}} \quad \text{pour} \quad \varphi = 32^\circ 46'.$$

(Novembre 1904.)

Marseille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — Trouver toutes les surfaces telles que le plan tangent en chaque point M rencontre un axe OZ en un point équidistant du point de contact M et d'un point fixe O pris sur OZ.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Intégrer l'équation

$$(x + 15y) dx + (2y - 15x) dy = 0,$$

en employant un facteur intégrant.

(Novembre 1904.)

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — Sur la normale principale, en chaque point M d'une hélice circulaire S , et dans le sens de la concavité, on porte une longueur constante $MM_1 = l$ et l'on considère la courbe S_1 , lieu du point M_1 .

On demande de déterminer l de façon que les courbes S et S₁ jouissent de l'une des quatre propriétés suivantes :

- 1° Les courbes S et S₁ ont même courbure;
- 2° Elles ont même torsion absolue;
- 3° Les tangentes MT et M₁T₁ aux points correspondants sont rectangulaires;
- 4° La tangente M₁T₁ à S₁ en M₁ est parallèle à la binormale MH à la courbe S en M.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Intégrer l'équation

$$2x^3 dy = y^3 dx + 3x^2 y dx.$$

2° Intégrer l'équation

$$x(x^2 + y^2)p + 2y^2(px + qy - z) = 0,$$

et déterminer une surface intégrale passant par le cercle

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad z = c.$$

(Juillet 1904.)

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Étant donné un système de deux équations différentielles du premier ordre

$$(A) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = \varphi(x, y, z),$$

énoncer et démontrer le théorème fondamental de Cauchy, relatif à l'existence des intégrales de ce système.

Qu'entend-on par INTÉGRALE GÉNÉRALE et par INTÉGRALE PREMIÈRE du système (A)?

II. Soit $y = \varphi(x, C)$ l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + y^2 + ay + b = 0,$$

où a et b sont des fonctions de x. Démontrer que l'on a, quelle que soit la constante C,

$$\int \varphi(x, C) dx = -\frac{1}{2} \log \frac{\partial \varphi}{\partial C} - \frac{1}{2} \int a dx.$$

APPLICATION. — Soient y_1, y_2, y_3 trois intégrales particulières de l'équation (1); en déduire une formule donnant l'intégrale générale de l'équation linéaire

$$(2) \quad \frac{d^2 z}{dx^2} + a \frac{dz}{dx} + bz = 0.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Soit R le quadrilatère curviligne ABCD, limité par les arcs AB, BC, CD, DA appartenant respectivement à quatre paraboles P_1, P_2, P_3, P_4 ayant pour foyer l'origine et représentées en coordonnées rectangulaires par les équations

$$(P_1) \quad y^2 - 4x - 4 = 0,$$

$$(P_2) \quad y^2 - 2x - 1 = 0,$$

$$(P_3) \quad y^2 + 6x - 9 = 0,$$

$$(P_4) \quad y^2 + 4x - 4 = 0.$$

On demande de calculer l'intégrale double

$$\iint \frac{y \, dx \, dy}{(1+x)^{\frac{3}{2}} \sqrt{x^2+y^2}}$$

étendue à la région R.

N. B. — On peut, par exemple, remplacer l'intégrale double par une intégrale curviligne, ou employer le changement de variables défini par les formules

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv.$$

(Octobre 1904.)

Poitiers.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Déterminer la fonction $f(x, y)$ de manière que, en éliminant α et β de l'équation

$$z = \alpha x + \beta y + f(x, y),$$

on obtienne

$$z = px + qy + f(x, y).$$

II. Trouver l'équation aux dérivées partielles du second ordre, indépendante des constantes α et β de la fonction F

à laquelle satisfait la fonction z définie par

$$z = \alpha x + \beta y + F\left(\frac{y}{x}\right).$$

III. Trouver la surface S la plus générale satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles

$$z = px + qy + a \frac{y}{x},$$

et déterminer la surface particulière Σ contenant la courbe

$$z = 0, \quad x^3 + y^3 + 3axy = 0.$$

IV. Chercher les projections sur le plan xOy des lignes asymptotiques de la surface S et de la surface Σ .

V. Dans ce dernier cas on obtient des lignes droites et des coniques. Déterminer le cercle osculateur à l'une de ces coniques, le point de contact étant l'origine des coordonnées.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. A tout point (x, y) du plan correspondent λ, μ , de façon que l'on ait

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2 - \mu} + \frac{y^2}{b^2 - \mu} = 1 \quad (a^2 > b^2).$$

Entre quelles limites sont, en général, λ et μ ?

Entre quelles limites varient λ et μ quand le point (x, y) est à l'intérieur de l'ellipse E ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

II. Transformer l'intégrale double

$$\iint F(x, y) dx dy$$

en prenant pour variables indépendantes λ et μ .

III. Comme application, calculer l'intégrale

$$\iint \frac{dx dy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + a^2 + b^2)^2 - 4(a^2 - b^2)x^2}}$$

étendue à tous les points intérieurs à l'ellipse E .

(Juillet 1904.)