

R. BRICARD

Sur l'extension à l'espace du théorème de Poncelet

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 554-558

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__554_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[L¹⁷e^a]

**SUR L'EXTENSION A L'ESPACE DU THÉORÈME
DE PONCELET;**

PAR M. R. BRICARD.

1. Dans un article récemment inséré aux *Nouvelles Annales* ⁽¹⁾, M. G. Fontené a signalé l'intérêt que paraissent devoir présenter les polyèdres homogènes de genre *un*, pour l'extension à l'espace du théorème de Poncelet, relatif aux polygones inscrits et circonscrits à des quadriques.

M. Fontené, à l'appui de ses vues, a considéré des polyèdres *tétraonaux*, ayant un nombre de sommets

⁽¹⁾ Même Tome, p. 433.

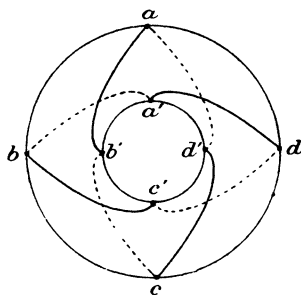
Consulter aussi l'article de M. Deltour (même Tome, p. 481) pour le sens des expressions employées dans la présente Note.

égal à pq (p et q étant deux nombres entiers dont chacun est au moins égal à 3).

J'envisagerai un polyèdre tétragonal à huit sommets, dans cette Note qui a pour but, moins d'avancer la question que de montrer, par la considération d'un exemple particulier, la nature des difficultés auxquelles on doit s'attendre, et dont le théorème plan de Poncelet ne pouvait donner idée.

Il faut d'abord établir l'existence d'un tel polyèdre. Considérons, à cet effet, la figure 1 qui représente un

Fig. 1.



tore, projeté orthogonalement sur son plan équatorial. Marquons, respectivement sur le parallèle maximum et sur le parallèle minimum, les quatre points a, b, c, d et les quatre points a', b', c', d' . Menons, à la surface du tore, les huit lignes suivantes :

$$ab', \quad bc', \quad cd', \quad da'$$

et

$$ad', \quad ba', \quad cb', \quad dc';$$

les quatre premières (traits pleins) étant tracées sur le demi-tore supérieur, et les quatre autres (traits ponctués) étant tracés sur le demi-tore inférieur). Il est

visible que ces huit lignes, et les parallèles maximum et minimum, décomposent la surface du tore en huit quadrilatères curvilignes, assemblés quatre par quatre autour de chaque sommet.

Ces quadrilatères sont

$$(T) \quad \begin{cases} abc'b', & bcd'c', & cda'd', & dab'a', \\ ab a'd', & bcb'a', & cdc'b', & dad'c'. \end{cases}$$

Cherchons maintenant à construire un polyèdre tétra-gonal organisé, au point de vue de la connexion, comme la figure précédente. Désignons encore par $a, a', \dots, d, d'$ les sommets de ce polyèdre. Ses huit faces seront les quadrilatères du Tableau (T). *Il faut que ces quadrilatères soient tous plans.*

Considérons une arête quelconque du polyèdre, ab , par exemple. Elle appartient aux deux faces planes

$$abc'b', \quad ab a'd'.$$

Donc ab rencontre $a'd'$ et $b'c'$; ab rencontre de plus, évidemment, $a'd$ et bc . On voit de même que chacune des droites $cd, a'b', c'd'$ rencontre les quatre droites

$$ad, \quad bc, \quad a'd', \quad b'c',$$

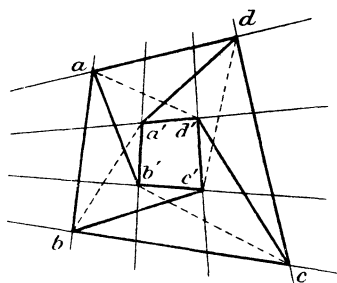
et l'on parvient à cette conclusion :

$ad, bc, a'd', b'c'$ sont quatre génératrices d'un même système d'un hyperboloïde (H); $ab, cd, a'b', c'd'$ sont quatre génératrices du même hyperboloïde et de l'autre système.

Réciproquement, traçons sur un hyperboloïde (H) quatre génératrices quelconques d'un même système et quatre génératrices quelconques de l'autre système

(fig. 2). Parmi les seize points de rencontre de ces génératrices, prises deux à deux, marquons-en huit, $a, a', \dots, d, d'$, telles que chaque génératrice en contienne deux et deux seulement. Les huit quadrilatères du Tableau (T) sont tous visiblement plans et consti-

Fig. 2.



tuent les huit faces du polyèdre tétragonal à huit sommets ⁽¹⁾.

2. *Le problème de construire un tel polyèdre inscrit à une quadrique (Q) et circonscrit à une quadrique (Q') paraît au moins triplement indéterminé.* En effet, le polyèdre dépend de 17 paramètres [9 correspondant au choix de l'hyperboloïde (H), 8 au choix des huit génératrices]. En outre, *ses sommets forment un système ponctuel de Lamé, et ses faces un système tangenciel de Lamé*, c'est-à-dire que toute quadrique contenant sept sommets contient le huitième, et que toute quadrique tangente à sept faces est tangente à la huitième. On le voit immédiatement, en

⁽¹⁾ Ce polyèdre, inscrit à l'hyperboloïde (H), lui est également circonscrit : en effet, toutes les faces contiennent deux génératrices de (H).

remarquant que les sommets peuvent être, de diverses manières, répartis quatre par quatre sur deux plans, et que l'on peut énoncer, pour les faces, un fait corrélatif.

Le problème de construire un tel polyèdre inscrit à une quadrique (Q) et circonscrit à une autre quadrique (Q') paraît donc bien triplement indéterminé, quelles que soient (Q) et (Q') , parce qu'il ne fait entrevoir que quatorze conditions distinctes entre les 17 paramètres dont dépend le polyèdre. Il y aurait lieu d'examiner si, contrairement à la vraisemblance, les quadriques (Q) et (Q') ne satisfont pas à une relation, et si, dans certains cas particuliers, l'indétermination ne peut pas être plus grande que dans le cas général.