

HADAMARD

Sur les séries de la forme $\sum a_n e^{-\lambda_n z}$

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 529-533

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__529_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[D2b, I9a]

SUR LES SÉRIES DE LA FORME $\sum a_n e^{-\lambda_n z}$;

PAR M. HADAMARD.

En reprenant une démonstration relative aux propriétés de la fonction de Riemann

$$\zeta(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \dots + \frac{1}{n^z} + \dots,$$

j'ai été conduit à en examiner de plus près le mécanisme. Je suis arrivé ainsi, relativement aux séries de la forme

$$(1) \quad F(z) = \sum_n a_n e^{-\lambda_n z},$$

où les λ_n sont des nombres réels et les a_n des nombres positifs, à quelques remarques qui peuvent avoir leur utilité.

1. Soit A la valeur de $F(p)$, p étant un nombre réel (compris, bien entendu, dans la région de convergence de la série). Donnons à z la valeur complexe $p + iq$ et considérons la quantité

$$\frac{1}{A} F(p + iq) = f(q) + i \varphi(q) = \xi + i \eta.$$

On a

$$(2) \quad \begin{cases} A f(q) = \sum a_n e^{-\lambda_n p} \cos(\lambda_n q) = \sum \alpha_n \cos \theta_n, \\ A \varphi(q) = - \sum a_n e^{-\lambda_n p} \sin(\lambda_n q) = \sum \alpha_n \sin \theta_n, \end{cases}$$

on désignant par α_n la quantité $a_n e^{-\lambda_n p}$ et par θ_n l'argument $-\lambda_n q$. On a d'ailleurs visiblement

$$\sum \alpha_n = A,$$

$$|f(q) + i\varphi(q)| < A.$$

Changeons q en $2q$ et comparons aux expressions (2) les suivantes :

$$f(2q) = \xi_1 = \sum \frac{\alpha_n}{A} \cos 2\theta_n,$$

$$\varphi(2q) = \eta_1 = \sum \frac{\alpha_n}{A} \sin 2\theta_n.$$

Pour cela, nous considérerons la quantité

$$\frac{1}{A} \sum \alpha_n (h \cos \theta_n + k \sin \theta_n + l)^2,$$

où h, k, l sont trois nombres réels quelconques. Si l'on remarque que l'on a

$$h^2 \cos^2 \theta_n + k^2 \sin^2 \theta_n = \frac{h^2 + k^2}{2} + \frac{h^2 - k^2}{2} \cos 2\theta_n,$$

cette quantité s'écrira

$$l^2 + \frac{h^2 + k^2}{2} + \frac{h^2 k^2}{2} \xi_1 + h k \eta_1 + 2 h l \xi + 2 k l \eta$$

$$= (l + h \xi + k \eta)^2 + \left(\frac{1 + \xi_1}{2} - \xi^2 \right) h^2$$

$$+ (\eta_1 - 2 \xi \eta) h k + \left(\frac{1 - \xi_1}{2} - \eta^2 \right) k^2.$$

Or, la quantité précédente est essentiellement positive. Donc, il faut que cette forme quadratique soit définie; par conséquent, que l'on ait

$$(3) \quad \xi_1 > 2\xi^2 - 1,$$

$$(4) \quad \left(\frac{1 + \xi_1}{2} - \xi^2 \right) \left(\frac{1 - \xi_1}{2} - \eta^2 \right) - \left(\frac{\eta_1}{2} - \xi \eta \right)^2 \geq 0.$$

La première inégalité, qui est d'ailleurs comprise dans la seconde, exprime le résultat suivant :

Si ξ est positif, et que l'on pose

$$\xi = \cos \psi \quad \left(0 < \psi < \frac{\pi}{2} \right);$$

$$\xi_1 = \cos \psi_1 \quad (0 < \psi_1 \leq \pi),$$

on aura

$$(5) \quad \psi_1 \leq 2\psi.$$

2. Quant à l'inégalité (4), elle nous montre que, le point (ξ, η) étant donné, le point (ξ_1, η_1) est intérieur au cercle C dont un diamètre est situé suivant la droite $\eta_1 = 2\xi\eta$, les abscisses de ses extrémités étant $2\xi^2 - 1$, $1 - 2\eta^2$.

Considérons le module $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ de $\frac{1}{A}F(p + iq)$ et le module $\rho_1 = \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}$ de $\frac{1}{A}F(p + 2iq)$.

Le centre du cercle C, à savoir le point $(\xi^2 - \eta^2, 2\xi\eta)$, est situé à une distance ρ^2 de l'origine; le rayon du même cercle est $1 - \rho^2$.

Si donc ρ^2 est plus petit que $\frac{1}{2}$, le cercle C contient l'origine à son intérieur; mais si $\rho > \frac{\sqrt{2}}{2}$, tout point de ce cercle est à une distance de l'origine au moins égale à $2\rho^2 - 1$. On arrive donc à l'énoncé suivant :

Si l'on pose

$$\rho = |\xi + i\eta| = \cos \chi,$$

$$\rho_1 = |\xi_1 + i\eta_1| = \cos \chi_1$$

et que l'angle χ soit inférieur à $\frac{\pi}{4}$, on aura

$$\chi_1 \leq 2\chi.$$

3. Il est clair maintenant qu'on peut appliquer à plusieurs reprises les deux propositions que nous venons d'énoncer et qu'on obtient ainsi les suivantes :

Si l'on pose

$$f(q) = \cos[\psi(q)],$$

$$|f(q) + i\varphi(q)| = \cos[\chi(q)],$$

on a

$$(6) \quad \begin{cases} \psi(q) \leq 2^k \psi\left(\frac{q}{2^h}\right), \\ \chi(q) \leq 2^h \chi\left(\frac{q}{2^h}\right), \end{cases}$$

la première inégalité supposant toutefois que le second membre est plus petit que π ; la seconde, que son second membre est plus petit que $\frac{\pi}{2}$.

Enfin, dans les deux inégalités précédentes, on peut faire grandir h indéfiniment. On a sensiblement, pour q très petit,

$$f(q) = 1 - \frac{q^2}{2A} F''(p) = 1 - \frac{1}{2} \psi^2(q), \quad \varphi(q) = \frac{q}{A} F'(p),$$

$$|f(q) + i\varphi(q)| = 1 - \frac{q^2}{2} \left(\frac{F''(p)}{A} - \frac{F'^2(p)}{A^2} \right) = 1 - \frac{1}{2} \chi^2(q),$$

et, par suite,

$$\psi(q) = q \sqrt{\frac{F''(p)}{F(p)}}, \quad \chi(q) = q \sqrt{\frac{F''(p)}{F(p)} - \frac{F'^2(p)}{F^2(p)}}.$$

Si, dans ces relations, on change q en $\frac{q}{2^h}$, pour reporter le résultat obtenu dans les inégalités (6), on a

$$f(q) \geq \cos \left(q \sqrt{\frac{F''(p)}{F(p)}} \right),$$

$$|f(q) + i\varphi(q)| \geq \cos \left(q \sqrt{\frac{F''(p)}{F(p)} - \left(\frac{F'(p)}{F(p)} \right)^2} \right),$$

(533)

pourvu que l'argument du cosinus soit plus petit que π dans la première inégalité, plus petit que $\frac{\pi}{2}$ dans la seconde.