

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 518-527

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__518_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSEES.

1862.

(1900, p. 394.)

Soient α , β , γ trois points animés de mouvements uniformes sur les côtés d'un triangle abc . Les trois cercles analogues au cercle $a\beta\gamma$ se coupent en un point d'un cercle fixe.

(E. DUPORCQ.)

SOLUTION

Par M. THIE.

Soit m le point commun aux cercles $a\beta\gamma$, $b\gamma\alpha$. On a

$$\begin{aligned} \widehat{\beta m \gamma} &= \pi - a, & \widehat{\gamma m \alpha} &= \pi - b, \\ \text{d'où} & & \widehat{\alpha m \beta} &= \pi - c, \end{aligned}$$

ce qui montre bien que le point m appartient au cercle $c\alpha\beta$.

Remarquons ensuite que la droite $\beta\gamma$ enveloppe une parabole P , tangente à ab et ac . Le cercle $a\beta\gamma$ passe donc par le foyer f de P . Le cercle $b\gamma\alpha$ passe de même par un point

fixe g . L'angle $\widehat{fmg}$ est donc égal à la somme ou à la différence des angles $\widehat{fm\gamma}$, $\widehat{\gamma mg}$, égaux respectivement aux angles fixes $\widehat{fa\gamma}$, $\widehat{fb\gamma}$ ou à leurs supplémentaires.

L'angle $\widehat{fmg}$ est donc constant. Par suite, etc.

1926.

(1902, p. 287.)

Les parallèles aux normales d'un paraboloidé, menées par les projections de leurs pieds sur le plan tangent au sommet, forment une congruence linéaire dont les directrices sont les arcs de courbure des sections principales répondant au sommet.

(Ce théorème permet d'obtenir simplement la direction de la normale en un point donné et, réciproquement, le point où la normale a une direction donnée.)

(M. D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par M. R. B.

Soient

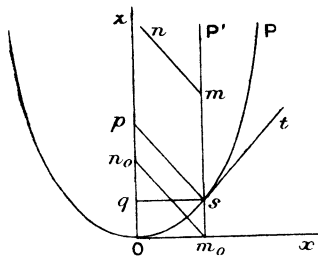
(Π) le paraboloidé;

Oz son axe;

O son sommet;

Ox et Oy les tangentes principales au point O .

Prenons comme plan de la figure le plan (xOz), et soit P



la parabole, section de (Π) par ce plan.

m étant un point quelconque de (Π), considérons la parabole P' , intersection de (Π) et d'un plan parallèle à (γOz),

mené par le point m . Le sommet de P' est au point s où cette parabole coupe P . Soit st la tangente à P en s . Il existe un cylindre circonscrit à (Π) , suivant P , et ayant ses génératrices parallèles à st . La normale mn à (Π) en m est normale à ce cylindre : elle est donc, en projection, perpendiculaire à st , c'est-à-dire parallèle à sp , qui est la normale à P en s .

Soient alors sq , $m_0 n_0$ deux droites dont la figure indique clairement la construction. On a

$$O n_0 = qp = \text{paramètre de la parabole } P,$$

en vertu de la propriété classique de la sous-normale. Donc le point n_0 est fixe. Mais $m_0 n_0$ n'est autre que la projection sur le plan (xOz) de la droite considérée dans l'énoncé : cette dernière droite rencontre donc la perpendiculaire menée par n_0 au plan de la figure, c'est-à-dire l'axe de courbure de P .

On verrait de même que la droite en question rencontre l'axe de courbure de la seconde parabole principale de (Π) .

1965.

(1903, p. 96.)

Rectifier la courbe représentée par

$$(x^2 + y^2)^4 - k^2 a^2 b^2 x^2 y^2 [(a^2 - b^2) + (x^2 - y^2)] = 0.$$

(E. RENAUD.)

SOLUTION

Par M. C. ALASIA.

Dans cette question il y a certainement une faute de copie ; je crois qu'elle doit s'énoncer : *Rectifier les courbes représentées par l'équation*

$$(x^2 + y^2)^4 - k^2 a^2 b^2 x^2 y^2 \left[\left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} \right) + \left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} \right) \right] = 0,$$

et c'est sous cette forme que je vais la considérer.

J'observe qu'elle peut s'écrire

$$(x^2 + y^2)^4 = k^2 [(a^2 y^2 + b^2 x^2)(a^2 x^2 - b^2 y^2)]$$

et se décomposer en deux facteurs :

$$\begin{aligned} (1) \quad & (x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 - b^2 y^2, \\ (2) \quad & (x^2 + y^2)^2 = k(a^2 y^2 + b^2 x^2). \end{aligned}$$

J'obtiens donc les équations des deux courbes rapportées au même système de coordonnées. La courbe (1) est celle de la question 1963 (résolue p. 237) : je ne considérerai donc que la courbe (2), en suivant les mêmes notations et la même méthode, indiquées d'ailleurs par M. Booth.

Posant $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, l'équation (2) s'écrit

$$a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi = \rho^2,$$

d'où

$$\frac{ds^2}{d\theta^2} = \frac{a^4 \sin^2 \theta + b^4 \cos^2 \theta}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}.$$

Faisant $a^2 \tan \varphi = b^2 \tan \omega$, on a

$$\frac{ds^2}{d\theta^2} = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega};$$

et alors

$$\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{b^2}{a^2} \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \omega} \quad \text{et} \quad \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \omega} = \frac{a^4}{a^4 \cos^2 \omega + b^4 \sin^2 \omega}.$$

La substitution de ces valeurs nous donne

$$\frac{ds}{d\omega} = \frac{a^3 b^3}{a^4 \cos^2 \omega + b^4 \sin^2 \omega} (a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega)^{-\frac{1}{2}},$$

c'est-à-dire, en posant

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = p^2, \quad \frac{a^4 - b^4}{a^4} = q,$$

d'où

$$q = \frac{a^2 + b^2}{a^2} p^2 \quad (q > p^2)$$

et

$$s = \frac{b^3}{a^2} \int \frac{d\omega}{1 - q \sin^2 \omega} (1 - p^2 \sin^2 \omega)^{-\frac{1}{2}},$$

intégrale elliptique à paramètre circulaire.

Note. — La courbe (2) est inverse de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, lorsqu'on prend le centre comme pôle d'inversion.

1982.

(1903, p. 480.)

Soient

$$\left\{ \begin{array}{l} a, \quad b, \quad c \\ a', \quad b', \quad c' \\ a'', \quad b'', \quad c'' \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha, \quad \beta, \quad \gamma \\ \alpha', \quad \beta', \quad \gamma' \\ \alpha'', \quad \beta'', \quad \gamma'' \end{array} \right\}$$

les cosinus directeurs, par rapport à trois axes rectangulaires, des arêtes de deux trièdres trirectangles. Démontrer que le cône ayant pour équation

$$\begin{aligned} & (ax + by + cz)(\alpha x + \beta y + \gamma z) \\ & + (\alpha'x + \beta'y + \gamma'z)(\alpha''x + \beta''y + \gamma''z) \\ & + (\alpha''x + \beta''y + \gamma''z)(\alpha'x + \beta'y + \gamma'z) = 0 \end{aligned}$$

est de révolution.

Définir géométriquement l'axe du cône.

(R. BRICARD.)

SOLUTION

Par M. LETIERCE.

Soit $M(x, y, z)$ un point du cône; posons

$$\begin{aligned} X &= ax + by + cz, & Y &= \alpha'x + \beta'y + \gamma'z, & Z &= \alpha''x + \beta''y + \gamma''z, \\ X' &= \alpha x + \beta y + \gamma z, & Y' &= \alpha'x + \beta'y + \gamma'z, & Z' &= \alpha''x + \beta''y + \gamma''z; \end{aligned}$$

(X, Y, Z) sont les coordonnées de M par rapport au premier trièdre, (X', Y', Z') les coordonnées du même point par rapport au second et l'équation s'écrit

$$(1) \quad XX' + YY' + ZZ' = 0.$$

L'équation du cône ne changeant pas quand on remplace un des trièdres par son symétrique par rapport à l'origine, nous pouvons supposer que les deux trièdres sont directs.

Cela étant, soit OA l'axe de rotation qui amène le second trièdre sur le premier par une rotation θ ; après la rotation, M vient en M' et la relation (1) montre que OM' est perpendiculaire à OM . Si m est le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur OA , l'examen des triangles MmM' , MOM' , MOm

montre immédiatement que, si V est l'angle de OM et de OA , l'on a

$$\sin V = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2}}.$$

Le lieu de M est donc un cône de révolution dont on connaît l'axe OA et le demi-angle au sommet.

Le cône est réel si $\theta \geq \frac{\pi}{2}$, imaginaire dans le cas contraire.

1994.

(1904, p. 144.)

La normale au point M d'une conique de centre O a pour pôle le point N . On projette orthogonalement M en P sur la droite ON . Le cercle mené par N, P , et un point fixe quelconque, passe par un autre point fixe lorsqu'on fait varier M sur la conique. (Canon.)

SOLUTION ANALYTIQUE

Par M. E.-N. BARISIEN.

Supposons que la conique donnée soit l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Si φ est l'angle d'anomalie excentrique en M , l'équation de la normale en M est

$$(1) \quad ax \sin \varphi - by \cos \varphi = c \sin \varphi \cos \varphi.$$

Les coordonnées du pôle N de cette normale sont

$$(2) \quad x_1 = \frac{a^3}{c^2 \cos \varphi}, \quad y_1 = -\frac{b^3}{c^2 \sin \varphi}.$$

La droite ON a donc pour équation

$$(3) \quad \frac{y}{x} = -\frac{b^3 \cos \varphi}{a^3 \sin \varphi}.$$

La perpendiculaire abaissée de M sur ON a pour équation

$$y - b \sin \varphi = \frac{a^3 \sin \varphi}{b^3 \cos \varphi} (x - a \cos \varphi)$$

ou

$$(4) \quad a^3 x \sin \varphi - b^3 y \cos \varphi = (a^4 - b^4) \sin \varphi \cos \varphi.$$

Les coordonnées du point P s'obtiennent en résolvant (3) et (4) par rapport à x et à y .

On obtient ainsi

$$(5) \quad \begin{cases} x_2 = \frac{a^3(a^4 - b^4) \sin^2 \varphi \cos \varphi}{a^6 \sin^2 \varphi + b^6 \cos^2 \varphi}, \\ y_2 = -\frac{b^3(a^4 - b^4) \sin \varphi \cos^2 \varphi}{a^6 \sin^2 \varphi + b^6 \cos^2 \varphi}. \end{cases}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \overline{ON}^2 &= x_1^2 + y_1^2 = \frac{a^6 \sin^2 \varphi + b^6 \cos^2 \varphi}{c^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}, \\ \overline{OP}^2 &= x_2^2 + y_2^2 = \frac{(a^4 - b^4)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{a^6 \sin^2 \varphi + b^6 \cos^2 \varphi}. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$(6) \quad ON \cdot OP = \frac{a^4 - b^4}{c^2} = a^2 + b^2.$$

Donc, la puissance d'un cercle quelconque passant par P et N est $(a^2 + b^2)$.

Il en résulte que, si A est un point fixe du plan, le second point B d'intersection de la droite OA avec le cercle passant par P, N et A, satisfait à la relation

$$OB \cdot OA = a^2 + b^2.$$

B est donc le second point fixe par lequel passent tous les cercles APN.

Remarques :

I. La droite ON coupe le cercle orthoptique de l'ellipse en deux points qui sont conjugués harmoniques des points P et N.

II. La droite MP est normale à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^6} + \frac{y^2}{b^6} = \left(\frac{a^4 - b^4}{a^6 - b^6} \right)^2.$$

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Par M. THIE.

Il suffit visiblement d'établir la constance du produit OP.ON. Or considérons le cercle (MNP), qui a pour diamètre MN. On peut dire que ce cercle est circonscrit à un triangle ayant un sommet en N, et deux sommets confondus en M, le côté qui joint ces sommets étant la normale en M, et ce triangle est visiblement autopolaire par rapport à la conique donnée. Il en résulte (théorème de Faure) que le cercle (MNP) coupe orthogonalement le cercle orthoptique de la conique, et l'on a

$$OP \cdot ON = a^2 + b^2,$$

en désignant par a et b les demi-axes de cette conique.

1999.

(1904, p. 316.)

On considère une ellipse, un foyer F, un point variable M de l'ellipse, le cercle décrit sur FM comme diamètre et un cercle fixe. Le lieu des centres de similitude de ces deux cercles se compose de deux coniques. Cas où le cercle fixe est le cercle principal de l'ellipse.

(E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. H. LEZ.

Soient deux cercles

$$(1) \quad (x - \lambda)^2 + (y - \mu)^2 = r^2,$$

$$(2) \quad (x - \lambda')^2 + (y - \mu')^2 = r'^2;$$

les coordonnées des centres de similitude extérieur et intérieur seront données par les formules

$$(3) \quad x = \frac{\lambda' r - \lambda r'}{r - r'}, \quad y = \frac{\mu' r - \mu r'}{r - r'},$$

$$(4) \quad x = \frac{\lambda' r + \lambda r'}{r + r'}, \quad y = \frac{\mu' r + \mu r'}{r + r'}.$$

Or, si x' , y' sont les coordonnées du point M , elles satisfont à l'équation de l'ellipse, c'est-à-dire qu'on aura

$$(5) \quad b^2 x'^2 + a^2 y'^2 = a^2 b^2,$$

et les coordonnées du centre du cercle mobile seront

$$\lambda' = \frac{c + x'}{2}, \quad \mu' = \frac{y'}{2}, \quad r' = \frac{FM}{2} = \frac{a - ex'}{2}.$$

Par suite, l'équation (2) devient

$$\left(x - \frac{c + x'}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y'}{2}\right)^2 = \left(\frac{a - ex'}{2}\right)^2$$

ou

$$(6) \quad x^2 + y^2 - (c + x')x - y'y + cx' = 0,$$

cercle qui est constamment tangent au cercle principal

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Mais les formules (3) et (4) deviennent aussi

$$x = \frac{(c + x')r - \lambda(a - ex')}{2r - (a - ex')}, \quad y = \frac{y'r - \mu(a - ex')}{2r - (a - ex')},$$

$$x = \frac{(c + x')r + \lambda(a - ex')}{2r + (a - ex')}, \quad y = \frac{y'r + \mu(a - ex')}{2r + (a - ex')};$$

des deux premières, on tire

$$(7) \quad \begin{cases} x' = \frac{(2r - a)x + a\lambda - cr}{r + (\lambda - x)e}, \\ y' = \frac{(2r - a + 2\lambda e - ce)y + (a + ce - 2xe)\mu}{r + (\lambda - x)e}, \end{cases}$$

des deux autres, on tire aussi

$$(8) \quad \begin{cases} x' = \frac{(2r + a)x - a\lambda - cr}{r - (\lambda - x)e}, \\ y' = \frac{(2r + a - 2\lambda e + ce)y - (a + ce - 2xe)\mu}{r - (\lambda - x)e}. \end{cases}$$

Ces dernières égalités se déduisent également des premières en faisant

$$r = -r.$$

Les valeurs (7) et (8) étant des fonctions linéaires, transportées dans la relation (5), elles donneront évidemment des coniques pour le lieu des centres de similitude extérieur et intérieur des deux cercles.

Dans le cas où le cercle fixe (1) se confond avec le cercle principal,

$$\mu = \lambda = 0 \quad \text{et} \quad r = a;$$

alors les formules (7) et (8) se transforment en

$$(9) \quad \begin{cases} x' = \frac{a(x-c)}{a-ex} = \frac{a(x-ae)}{a-ex}, \\ y' = \frac{(a-ce)y}{a-ex} = \frac{b^2 y}{a(a-ex)} \end{cases}$$

et

$$(10) \quad \begin{cases} x' = \frac{a(3x-c)}{a+ex} = \frac{a(3x-ae)}{a+ex}, \\ y' = \frac{(3a+ce)y}{a+ex} = \frac{a(3+e^2)y}{a+ex}. \end{cases}$$

Portant les valeurs (9) dans la relation (5), on trouve, pour le lieu des centres de similitude extérieurs, le cercle principal

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

ce qui était à prévoir, puisqu'il enveloppe tous les cercles mobiles.

De même, dans la relation (5), remplaçant x' , y' par les valeurs (10), on obtient, pour le lieu des centres de similitude intérieurs, l'ellipse

$$(4a^2 - b^2)^2 y^2 + b^2(8a^2 + b^2)x^2 - 8a^2 b^2 c x - a^2 b^4 = 0,$$

ayant son centre sur le grand axe en $x = \frac{4a^2 c}{8a^2 + b^2}$ et pour foyers l'origine O et le point $x = \frac{4a^2 c}{8a^2 + b^2}$.

Autres solutions de M. TABAKOFF, de M. ALVAREZ UDE et de M. LETIERCE.
