

C. CLAPIER

**Agrégation des sciences mathématiques
(concours de 1904). Solution de la question
de mathématiques élémentaires**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 506-510

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__506_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
(CONCOURS DE 1904).**

**SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES
ÉLÉMENTAIRES;**

PAR M. C. CLAPIER.

On donne, dans un plan, deux points A et A' et une droite D menée par A; un cercle variable Γ , situé dans ce plan, passe constamment par A et A'. Autour du point variable M où ce cercle rencontre D, on fait tourner la tangente en ce point à Γ d'un angle donné α dans le plan orienté; soit Δ la droite ainsi obtenue.

1° La droite Δ rencontre Γ en un point M' autre que M; le lieu des points M' est une droite D' que l'on construira.

Trouver le lieu géométrique de la projection orthogonale du point A' sur Δ .

2° Démontrer que le lieu géométrique du pôle P de Δ par rapport à Γ est une droite d.

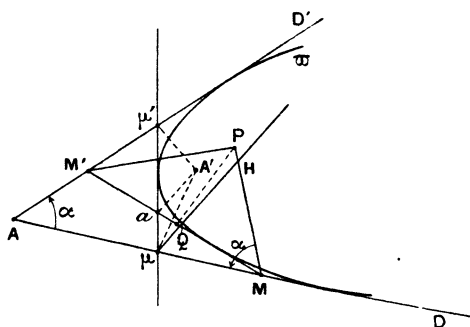
3° Soit d_1 une droite donnée dans le plan; chercher si cette droite peut être regardée comme lieu d du point P, en choisissant convenablement la droite D et l'angle α .

4° Trouver l'enveloppe de d lorsque D tourne autour du point A, l'angle α restant constant.

5° Soit T le triangle dont les sommets sont le point P et les points de rencontre de Δ et Γ ; étudier le déplacement du cercle circonscrit à ce triangle.

I. Si l'on fait tourner la droite D d'un angle α autour du point A , dans le sens de l'orientation du plan, on obtiendra la droite D' . Le cercle variable Γ , qui passe par les points donnés A et A' , rencontre les droites D et D' , aux points M et M' ; les projections orthogonales du point A' sur les côtés du triangle AMM' sont sur une droite de Simpson $\overline{\mu\mu'}$ (*fig. 1*). Ainsi la projection a

Fig. 1.



du point A' sur la corde variable $\overline{MM'}$ ou Δ est une droite; il en résulte que Δ enveloppe une parabole ω admettant cette droite comme tangente au sommet et le point A' comme foyer.

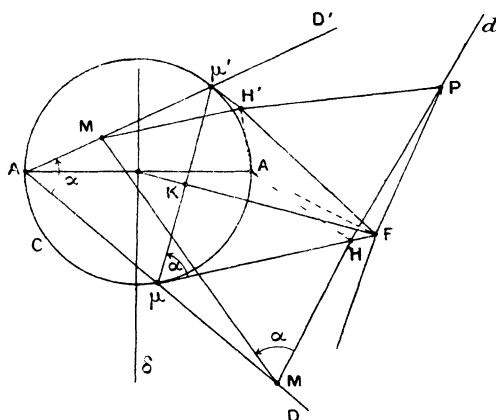
Remarques. — 1° Projetons le point A' en H sur la tangente MP au cercle Γ ; les points a , μ , H sont sur le cercle décrit sur $A'M$ comme diamètre. L'angle $\widehat{a\mu H}$ est égal à α ; il en résulte que MP enveloppe une parabole confocale à la première, ayant avec celle-ci la tangente commune D . D'ailleurs, en général, si un angle fixe se meut de manière que son sommet décrive une tangente à une parabole et que l'un de ses côtés touche cette

parabole, l'autre côté enveloppe une parabole ayant même foyer que la première.

2° Le milieu Q de la tangente MM' à la parabole ϖ inscrite dans l'angle DAD' , décrit une droite, qui est la tangente à la parabole ϖ parallèle à la polaire du point A . Donc la perpendiculaire PQ à Δ enveloppe une parabole ϖ' confocale à la précédente; la tangente au sommet s'obtiendra en menant une perpendiculaire à $\overline{\mu\mu'}$ en son milieu.

II. Supposons que le cercle Γ (*fig. 2*) prenne

Fig 2.



la position C , qui admet pour diamètre AA' ; le triangle $MM'P$ devient le triangle $\mu\mu'F$. Nous avons vu que la projection H de A' sur MP est sur la droite μF , faisant avec $\mu\mu'$ l'angle α ; de même la projection H' du point A' sur $M'P$ décrit le côté $\mu'F$. Mais, d'autre part, l'angle $\widehat{HFH'}$ est égal à l'angle $\widehat{HPH'}$ ou $180^\circ - 2\alpha$; il en résulte que la circonférence décrite sur $A'P$ comme

diamètre passe par H, H' et F. L'angle $A'FP$ est droit et le lieu du point P est une droite d qu'il est facile de placer lorsqu'on a déterminé le point fixe F.

III. Inversement, si le point F est donné sur la droite d , en menant par ce point les tangentes $F\mu$, $F\mu'$ au cercle C, on en déduira sans ambiguïté la droite D et l'angle α .

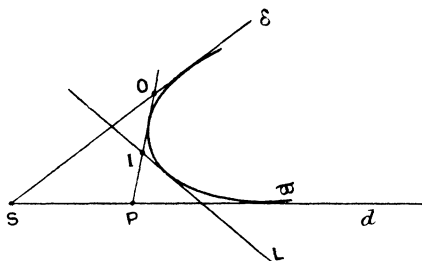
Pour qu'une droite d , donnée dans le plan puisse être envisagée comme lieu géométrique du pôle P par rapport à Δ , il faut et il suffit que le point F , obtenu en projetant le point A' , soit en dehors du cercle C; en d'autres termes la droite d , devra rencontrer la ligne indéfinie AA' en un point qui soit en dehors du segment $\overline{AA'}$.

IV. Lorsque D tourne autour du point A, l'angle α restant constant, l'angle $\widehat{\mu F \mu'}$ reste fixe et le point F décrit une circonférence C' concentrique au cercle C. La droite d se meut de manière que la projection orthogonale du point A' décrive un cercle C' extérieur à ce point; elle enveloppe une ellipse ayant les points A et A' comme foyers.

V. Nous avons vu que les côtés et la hauteur $\overline{PQ}$ variable du triangle T enveloppaient quatre paraboles confocales; le centre O du cercle Γ est situé à l'intersection de PQ avec la perpendiculaire δ au milieu de AA' . Le cercle circonscrit au triangle T est décrit sur OP comme diamètre; il se déplace de manière que ce diamètre enveloppe une parabole ϖ' et que ses extrémités O et P décrivent respectivement deux droites δ et d .

Cette parabole ϖ' admet comme tangente au sommet la perpendiculaire KF à $\mu\mu'$; comme les projections du foyer A' sur d et δ sont situées sur cette droite, elle est inscrite dans l'angle formé par les droites respectivement lieux du pôle P et du centre O (*fig. 3*). Le point I

Fig. 3.



milieu de OP décrit une tangente IL à la parabole ϖ' ; c'est le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle T . Deux pareils cercles infiniment voisins se couperont en deux points sur une perpendiculaire à L et réciproquement sur toute normale à L existeront deux points de leur enveloppe; celle-ci est une conique admettant comme axe de symétrie la ligne L qu'il est facile de placer en prenant deux positions particulières du triangle T .
