

Certificats d'analyse supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 463-466

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_463_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0,$$

où a, b, c sont des fonctions continues de x et y dans une certaine région du plan où va rester le point (x, y) ; de plus, dans cette région, c est négatif.

Démontrer qu'il ne peut y avoir DEUX intégrales de l'équation précédente prenant sur une courbe fermée C une succession de valeurs données et étant continues à l'intérieur de C ainsi que leurs dérivées partielles des deux premiers ordres.

II. Soit l'équation

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = cu,$$

où c est une fonction holomorphe de x et y dans le voisinage de $x = 0, y = 0$. Montrer que l'équation précédente admet des intégrales de la forme

$$(2) \quad P(x, y) \log(x^2 + y^2) + Q(x, y),$$

où P et Q sont holomorphes autour de l'origine, et où $P(0, 0)$ a une valeur donnée g .

Dans quel problème de la Théorie de la chaleur rencontre-t-on l'équation (1) avec c positif? Quelle est l'interprétation physique des singularités correspondant à la forme (2)?

ÉPREUVE PRATIQUE. — Étant donnée l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u,$$

trouver l'intégrale de cette équation qui, pour $x = 0$, se réduit à UN et qui, pour $y = 0$, se réduit à UN.

Cette intégrale se présentera sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances de x et de y . Il faut trouver la loi des coefficients de cette série. (Juillet 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Étant considérée l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz + d,$$

où les coefficients a, b, c, d sont holomorphes dans le voisinage de $x = 0, y = 0$, démontrer qu'il existe une intégrale z de cette équation déterminée par les conditions suivantes : on a

$$\begin{aligned} z &= f(x) && \text{pour } y = 0, \\ z &= \varphi(y) && \text{pour } x = 0, \end{aligned}$$

f et φ étant deux fonctions données, respectivement holomorphes autour de $x = 0$ et de $y = 0$. On suppose d'ailleurs $f(0) = \varphi(0)$.

II. Étant donné un contour fermé C , qu'appelle-t-on FONCTION DE GREEN

$$G(x, y; a, b)$$

relative à l'aire limitée par ce contour et au point (a, b) ?

Énoncer les propriétés fondamentales de cette fonction et s'en servir pour trouver l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

s'annulant sur C et continue à l'intérieur; la fonction $f(x, y)$ est une fonction donnée de x et de y .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Trouver la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2},$$

a désignant une constante positive supérieure à UN.

(Octobre 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. On considère l'équation différentielle (tous les éléments étant réels)

$$(1) \quad x^2 \frac{dy}{dx} = y - f(x, y),$$

où $f(x, y)$ est une série ordonnée suivant les puissances de x et y , pour $x = y = 0$, ne contenant pas de terme du premier degré en y , et convergeant pour $|x|$ et $|y|$ assez petits.

1° Montrer que l'intégrale de l'équation (1), passant par un point (x_0, y_0) suffisamment rapproché de l'origine, et pour lequel $x_0 > 0$, PASSE PAR L'ORIGINE.

2° Montrer qu'à gauche de l'axe Oy il n'y a qu'UNE SEULE INTÉGRALE PASSANT A L'ORIGINE.

II. Établir que la transformation

$$z = \frac{1}{x} \left(t + \frac{1}{t} \right)$$

entre les deux plans z et t transforme une circonférence du plan t , ayant l'origine pour centre, en une ellipse du plan z , ayant pour foyers les points $+1$ et -1 .

En déduire qu'une fonction $f(x)$ de la variable complexe x , holomorphe à l'intérieur d'une ellipse ayant pour foyers les points ± 1 , peut être développée en une série de la forme

$$f(x) = \sum a_n P_n(x),$$

les a_n étant des constantes et $P_n(x)$ le polynome

$$(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère l'équation

$$(1) \quad x \log x = a,$$

où a est une constante comprise entre 0 et $-\frac{1}{e}$, $\log x$ désignant le logarithme népérien de x et e étant la base de ce système de logarithmes.

1° Démontrer que l'équation (1) a deux racines réelles.

Ann. de Mathémat., 4^e série, t. IV. (Octobre 1904.) 30

2° On fait les approximations successives

$$x_1 = -a, \quad x_2 = \frac{a}{\log x_1}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{a}{\log x_{n-1}}, \quad \dots$$

*Montrer que les quantités positives x vont en diminuant.
Quelle relation leur limite a-t-elle avec l'équation (1)?*

(Juillet 1904.)