

G. FONTENÉ

**Sur l'extension du théorème des
polygones de Poncelet à l'espace, par
des polyèdres de genre un**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 433-439

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_433_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[L²17e_α]

**SUR L'EXTENSION DU THÉORÈME DES POLYGONES DE
PONCELET A L'ESPACE, PAR DES POLYÈDRES DE
GENRE *un* ⁽¹⁾;**

PAR M. G. FONTENÉ.

I.

1. Appelons polyèdre homogène un polyèdre dont toutes les faces ont le même nombre x de côtés, dont tous les sommets ont le même nombre y d'arêtes. Un polyèdre homogène de genre *un* donne lieu aux *trois* relations

$$\begin{aligned} F + S &= A, \\ Fx &= Sy = 2A \end{aligned}$$

homogènes par rapport aux trois quantités F, S et A.
L'élimination de ces trois quantités donne

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} = 1 \quad \text{ou} \quad (x-2)(y-2) = 4.$$

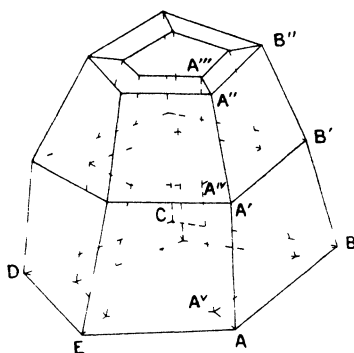
On peut donc avoir

- | | | | | |
|------|----------|---------|------|-----------|
| (1) | $x = 4,$ | $y = 4$ | avec | $F = S,$ |
| (2) | $x = 3,$ | $y = 6$ | avec | $F = 2S,$ |
| (2') | $y = 3,$ | $x = 6$ | avec | $S = 2F,$ |

les deux derniers cas étant corrélatifs l'un de l'autre.

(¹) La première idée de l'emploi de polyèdres de genre *un* pour l'objet indiqué ici s'est présentée au cours d'une conversation avec M. R. Bricard.

2. Parmi les polyèdres (1), on peut citer des polyèdres à un trou ou polyèdres *toriques* (voir la figure ci-dessous), dont les faces sont des quadrilatères assemblés 4 par 4 autour de chaque sommet. Si p est le nombre des sommets sur un contour tel que ABCD..., et si q est le nombre des sommets sur un contour tel que AA'A''A'''..., le nombre des sommets ou des



faces est pq . Le plus simple de ces polyèdres correspond à $p = 3$, $q = 3$, il a 9 sommets et 9 faces.

3. Les polyèdres (2) ont pour faces des triangles assemblés 6 par 6 autour de chaque sommet (sommets hexaèdres). Le plus simple de ces polygones correspond à $S = 7$.

On se donne à volonté les sommets 1, 2, ..., 7. On a les arêtes en joignant chaque sommet aux six autres. Pour former les 14 faces, on se rappelle (théorie des systèmes triples) que sept objets 1, 2, ..., 7 donnent lieu à sept triades, deux objets pris à volonté faisant partie d'une triade et d'une seule; un tel système triple donnera donc 7 faces, chacune de 21 arêtes appartenant à l'une de ces faces; au moyen de deux systèmes

triples, on aura les 14 faces, chaque arête étant commune à deux faces (1). On prendra par exemple

124, 235, 346, 457, 561, 672, 713

et

134, 245, 356, 467, 571, 612, 723.

On peut encore, pour former ces faces, écrire cycliquement

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 2, ..., 1, 2, ..., 7,

barrer de trois en trois, ce qui donne

1, 2, 4, 5, 7, 1, 3, 4, 6, 7, 2, 3, 5, 6,

et les 14 faces donnent la chaîne fermée

124, 245, 457, 571, 713, ..., 612.

On peut enfin considérer les 7 tétraèdres

1234, 2345, ..., 6712, 7123;

chacune des faces 123, 234, ..., 712 est commune à deux tétraèdres voisins; en supprimant ces faces, il reste les 14 faces du polyèdre torique.

Cette construction a été indiquée par Möbius, qui paraît s'être occupé le premier de polyèdres de genre un (2).

II.

4. De combien de paramètres dépendent les polyèdres considérés? Les sommets donneraient lieu à 3S paramètres, si les faces étaient nécessairement des triangles;

(1) Ce mode de formation des faces m'a été indiqué par M. Bricard.

(2) Voir l'Ouvrage de M. MAX BRÜCKNER (*Vielecke und Vielfache*, p. 221. Leipzig, 1900).

mais il faut défalquer $x - 3$ paramètres pour chaque face lorsque les faces ont x côtés; le nombre des paramètres restants est

$$3S - F(x - 3)$$

ou

$$3(F + S) - 2(F + S)$$

ou

$$F + S \quad (1).$$

Si donc le polyèdre doit être *circonscrit à une quadratique et inscrit à une autre*, ce qui forme $F + S$ conditions, il est déterminé, au moins en apparence. Il y a lieu de se demander si la recherche d'un tel polyèdre n'est pas un problème susceptible d'indétermination.

§. Considérons les deux quadriques de révolution

$$(\Sigma) \quad a(x^2 + y^2) + cz^2 + d = 0,$$

$$(\Sigma') \quad a'(x^2 + y^2) + c'z^2 + 2mz + d' = 0,$$

et un polyèdre torique circonscrit à la première et inscrit à la seconde. Nous supposons que les polygones $ABC \dots, A'B'C' \dots, \dots$ sont des polygones réguliers, situés dans des plans parallèles au plan des xy , ayant leurs côtés parallèles, et dont les centres sont sur l'axe des z . Le plan des zx étant supposé perpendiculaire aux arêtes $AB, A'B', \dots$, en leurs milieux $M, M', \dots$, on a dans ce plan un polygone de q côtés, $MM' \dots$, circonscrit à la conique

$$(\Sigma) \quad y = 0, \quad ax^2 + cz^2 + d = 0.$$

(1) Ce nombre, exact pour les polyèdres (2) et (2'), est un *minimum* dans le cas des polyèdres (1). Il a, en effet, été obtenu en écrivant que le fait, pour chaque face, d'être plane, impose $F(4 - 3) = F$ conditions. Or il est parfaitement possible que ces conditions ne soient pas indépendantes. Voir la note suivante.

Les points $AA' \dots$ sont sur la conique obtenue en coupant la quadrique Σ' par le plan

$$y = x \tan \frac{\pi}{p},$$

et les points $MM' \dots$ sont sur la conique

$$(S') \quad y = 0, \quad a'x^2 \sec^2 \frac{\pi}{p} + c'z^2 + 2mz + d' = 0.$$

Les deux coniques S et S' sont liées par une relation invariante puisqu'il existe un polygone de q côtés circonscrit à l'une et inscrit à l'autre; *les deux quadriques Σ et Σ' sont donc aussi liées par une relation invariante*, ce qui confirme la prévision du n° 4.

6. Soit, par exemple, $p = 3$, $q = 3$. On a, à cause de $p = 3$,

$$(S) \quad ax^2 + cz^2 + d = 0,$$

$$(S') \quad 4a'x^2 + c'z^2 + 2mz + d' = 0.$$

La condition de fermeture pour $q = 3$ est celle-ci : l'équation en λ relative aux deux coniques étant formée d'après l'équation

$$\lambda S + S' = 0,$$

la somme des racines carrées des racines de cette équation doit être nulle. L'une des valeurs de λ est d'ailleurs

$$\lambda = \frac{-4a'}{a},$$

et les deux autres sont données par l'équation

$$(3) \quad (\lambda c + c')(\lambda d + d') - m^2 = 0:$$

en désignant par λ' et λ'' les racines de cette équation

on doit donc avoir

$$2\sqrt{\frac{-a'}{a}} \pm \sqrt{\lambda'} \pm \sqrt{\lambda''} = 0.$$

Or, si l'on forme l'équation en λ relative aux deux quadriques

$$(\Sigma) \quad ax^2 + ay^2 + cz^2 + d = 0,$$

$$(\Sigma') \quad a'x^2 + a'y^2 + c'z^2 + 2mz + d' = 0,$$

d'après l'équation

$$\lambda \Sigma + \Sigma' = 0,$$

deux des racines ont pour valeur commune

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-a'}{a},$$

et les deux autres λ_3 et λ_4 ont les valeurs désignées plus haut par λ' et λ'' . La condition de fermeture est donc ici :

$$\sqrt{\lambda_1} \pm \sqrt{\lambda_2} \pm \sqrt{\lambda_3} \pm \sqrt{\lambda_4} = 0;$$

ce résultat est de nature à donner confiance dans les vues exposées ici pour l'extension véritable du théorème des polygones de Poncelet à l'espace ⁽¹⁾.

7. Soit encore $p = 4$, $q = 4$. On a, à cause de $p = 4$,

$$(S) \quad ax^2 + cz^2 + d = 0,$$

$$(S') \quad 2a'x^2 + c'z^2 + 2mz + d' = 0.$$

La condition de fermeture pour $q = 4$ est que, dans l'équation en λ formée comme il est dit plus haut,

(¹) Le polyèdre considéré ici dépend de 19 et non de 18 paramètres, comme le montre la considération des triangles ABC, A'B'C', A''B''C''. Le problème qui se pose à son sujet semble donc être, *a priori*, un problème simplement indéterminé; il se trouve être, dans le cas considéré, un problème impossible ou doublement indéterminé.

l'une des racines soit égale à la somme des deux autres.

L'une des valeurs de λ est ici

$$\lambda = \frac{-2\alpha'}{\alpha},$$

et les deux autres sont données par l'équation (3); on doit donc avoir, soit

$$-\frac{2\alpha'}{\alpha} = \lambda' + \lambda'',$$

soit

$$-\frac{2\alpha'}{\alpha} = \pm (\lambda' - \lambda'').$$

En conservant les notations du n° 6 *la condition de fermeture est donc ici, soit*

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4,$$

soit

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \pm (\lambda_3 - \lambda_4);$$

même observation qu'à la fin du numéro précédent.

8. Le temps me manque pour pousser la question plus loin; je souhaite que d'autres fassent ce que je ne puis faire.