

R. BRICARD

Sur une certaine suite arithmétique

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 406-413

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__406_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[I11a]

SUR UNE CERTAINE SUITE ARITHMÉTIQUE;

PAR M. R. BRICARD.

1. Soit m un nombre entier, positif et impair, quelconque. Je forme la suite

$$(M) \quad [\sqrt{m}], \quad [\sqrt{2m}], \quad \dots, \quad [\sqrt{(m-1)m}],$$

en désignant par $[x]$ le plus grand entier inférieur à x , si x n'est pas entier, et le nombre x lui-même, dans le cas contraire. Je me propose d'établir les deux théorèmes suivants :

1° La suite (M) contient $\frac{m-1}{2}$ nombres pairs, et $\frac{m-1}{2}$ nombres impairs;

2° La somme alternée

$$S = [\sqrt{(m-1)m}] - [\sqrt{(m-2)m}] + \dots + [\sqrt{2m}] - [\sqrt{m}]$$

a une valeur égale à $\frac{m-1}{2}$.

Faisons, par exemple, $m = 9$; la suite (M) est ici

$$[\sqrt{9}] = 3, \quad [\sqrt{18}] = 4, \quad [\sqrt{27}] = 5, \quad [\sqrt{36}] = 6, \\ [\sqrt{45}] = 6, \quad [\sqrt{54}] = 7, \quad [\sqrt{63}] = 7, \quad [\sqrt{72}] = 8;$$

elle contient quatre nombres pairs et quatre nombres impairs, et l'on a bien

$$8 - 7 + 7 - 6 + 6 - 5 + 4 - 3 = 4 = \frac{9-1}{2}.$$

2. Pour établir les propositions énoncées, je m'appuierai sur quelques considérations d'un ordre plus général.

Soient

$$(A) \quad a_1, \ a_2, \ \dots, \ a_{2p},$$

$$(B) \quad b_1, \ b_2, \ \dots, \ b_{2q}$$

deux suites contenant chacune un nombre pair de termes quelconques (entiers ou non). Je suppose que les termes de chaque suite sont rangés en ordre non croissant.

Désignons par

$$(a_h)$$

le nombre des termes (B) qui sont *plus petits* qu'un terme donné a_h de la suite (A), et par

$$(b_k)$$

le nombre des termes (A) qui sont *au plus égaux* à un terme donné b_k de la suite (B). Appelons I_a le nombre des termes impairs de la suite des nombres (a_h) , et S_a la valeur de la somme alternée

$$(a_1) - (a_2) + \dots + (a_{2h-1}) - (a_h),$$

et soient, enfin, I_b et S_b les nombres analogues relatifs à la suite des nombres (b_h) . *Je dis que l'on a*

$$S_a = I_b, \quad S_b = I_a.$$

Figurons, en effet, un échiquier rectangulaire, de $2p$ colonnes et de $2q$ lignes. En bas de chaque colonne, écrivons dans l'ordre, en commençant par la gauche, les nombres $a_1, a_2, \dots, a_{2p}$. A gauche de chaque ligne écrivons dans l'ordre, en commençant par le bas, les

(408)

nombres $b_1, b_2, \dots, b_{2q}$. Cela fait, marquons un point dans la case de coordonnées (h, k) , si l'on a

$$b_k < a_h,$$

et laissons cette case blanche, si l'on a

$$b_k \geq a_h.$$

Voici, par exemple, le diagramme obtenu, en supposant que les suites (A) et (B) sont ainsi constituées :

$$\begin{array}{ll} \text{(A)} & 17, \quad 13, \quad 13, \quad 8, \quad 5, \quad 3, \\ \text{(B)} & 10, \quad 9, \quad 8, \quad 3. \end{array}$$

(B)	3	.	.	.	.	.	
	8	.	.	.			
	9	.	.	.			
	10	.	.	.			
		17	13	13	8	5	3
		(A)					

Il est clair que le nombre des cases *marquées* dans la colonne de rang h est le nombre (a_h) et que le nombre des cases *non marquées* dans la ligne de rang k est le nombre (b_k) . Cela posé, cherchons à évaluer la somme alternée

$$S_a = (a_1) - (a_2) + \dots - (a_{2p}).$$

A cet effet, remplaçons les points marqués dans l'échiquier par le nombre $+1$, quand ils appartiennent à une colonne de rang impair, et par le nombre -1 ,

quand ils appartiennent à une colonne de rang pair. Le diagramme pris comme exemple devient ainsi

3	+1	-1	+1	-1	+1	
8	+1	-1	+1			
9	+1	-1	+1			
10	+1	-1	+1			
	17	13	13	8	5	3

et la somme alternée S_a est évidemment égale à la somme algébrique de tous les nombres inscrits dans l'échiquier. Or effectuons cette somme en totalisant successivement chaque *ligne*. La somme relative à la ligne de rang k est égale à 0, si le nombre des termes qui y sont inscrits est pair, et à $+1$ dans le cas contraire. Mais, comme les cases de cette ligne sont en nombre pair $2p$, la parité du nombre des termes qui y sont inscrits est la même que la parité du nombre des cases blanches qu'elle contient. Or ce dernier nombre est égal à (b_k) , comme on l'a remarqué plus haut.

En résumé, la somme algébrique S_a contient autant d'unités qu'il y a de nombres impairs dans la suite des nombres (b_k) . On a donc bien

$$S_a = I_b. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Remarque. — I_a et I_b , et par suite S_a et S_b , sont des nombres de même parité. En effet, I_a est pair ou impair en même temps que le nombre total des cases marquées dans le premier diagramme; I_b est pair ou impair en même temps que le nombre total des cases blanches. Or, le nombre des cases marquées et celui des cases

blanches sont de même parité, parce que le nombre total des cases de l'échiquier est le nombre pair $4pq$.

3. Il est maintenant facile d'établir les propositions énoncées au début de cet article. Je supposerai que, m étant un nombre impair, les suites (A) et (B) sont ainsi constituées :

$$(A) \quad (m-1)^2, \quad (m-2)^2, \quad \dots, \quad 4, \quad 1,$$

$$(B) \quad (m-1)m, \quad (m-2)m, \quad \dots, \quad 2m, \quad m.$$

Le nombre (km) , relatif à un terme de la suite (B), est le nombre des carrés entiers *au plus égaux* à km ⁽¹⁾; on a donc, en employant la notation fixée au début,

$$(km) = [\sqrt{km}].$$

Le nombre (h^2) , relatif à un terme de la suite (A), est le nombre des multiples de m qui sont *inférieurs* à h^2 . On a donc

$$(h^2) = \left\{ \frac{h^2}{m} \right\},$$

en appelant $\{x\}$ le plus grand nombre entier *inférieur* à x ($\{x\} = x - 1$, si x est entier).

Comme les termes de chaque suite sont bien en nombre pair $m - 1$, on peut appliquer les résultats du n° 2 : on voit donc que, si l'on forme les suites

$$[\sqrt{(m-1)m}], \quad [\sqrt{(m-2)m}], \quad \dots, \quad [\sqrt{2m}], \quad [\sqrt{m}]$$

et

$$\left\{ \frac{(m-1)^2}{m} \right\}, \quad \left\{ \frac{(m-2)^2}{m} \right\}, \quad \dots, \quad \left\{ \frac{4}{m} \right\}, \quad \left\{ \frac{1}{m} \right\},$$

(¹) Le fait est exact pour le premier terme de la suite (B), à cause de

$$m^2 > (m-1)m > (m-1)^2;$$

il est donc, *a fortiori*, exact pour les autres termes.

la somme alternée des termes de chacune de ces suites, calculée en donnant le signe + au terme le plus grand, est égale au nombre des termes impairs de l'autre suite.

Il suffit donc, pour obtenir la démonstration cherchée, d'établir que :

1° *La suite*

$$\left\{ \frac{h^2}{m} \right\} \quad (h = m-1, m-2, \dots, 1)$$

contient $\frac{m-1}{2}$ nombres impairs ;

2° *La somme alternée*

$$S' = \left\{ \frac{(m-1)^2}{m} \right\} - \left\{ \frac{(m-2)^2}{m} \right\} + \dots + \left\{ \frac{4}{m} \right\} - \left\{ \frac{1}{m} \right\}$$

a pour valeur $\frac{m-1}{2}$.

1° Soient q_h et r_h le quotient et le reste obtenus en divisant h^2 par m , et en ayant soin de prendre $r_h = m$, si la division se fait exactement. On a

$$h^2 = mq_h + r_h, \quad r_h \leq m, \quad \left\{ \frac{h^2}{m} \right\} = q_h.$$

On tire de là

$$(m-h)^2 = m(m + q_h - 2h) + r_h, \quad r_h \leq m,$$

d'où l'on conclut

$$(1) \quad \left\{ \frac{(m-h)^2}{m} \right\} = m + \left\{ \frac{h^2}{m} \right\} - 2h,$$

nombre qui est de parité différente de celle de $\left\{ \frac{h^2}{m} \right\}$, puisque m est impair.

Deux termes de la suite $\left\{ \frac{h^2}{m} \right\}$, équidistants des ex-

(412)

trêmes, sont donc de parités différentes, ce qui établit le premier point.

2° On a

$$S' = - \left\{ \frac{1}{m} \right\} + \dots + (-1)^h \left\{ \frac{h^2}{m} \right\} + \dots \\ + (-1)^{m-h} \left\{ \frac{(m-h)^2}{m} \right\} + \dots + \left\{ \frac{(m-1)^2}{m} \right\},$$

ou bien, en groupant deux à deux les termes équidistants des extrêmes,

$$S' = \sum_{h=1}^{h=\frac{m-1}{2}} (-1)^h \left[\left\{ \frac{h^2}{m} \right\} - \left\{ \frac{(m-h)^2}{m} \right\} \right],$$

et, en tenant compte de la relation (1),

$$S' = \sum_{h=1}^{h=\frac{m-1}{2}} (-1)^h (2h - m).$$

Or, on a

$$2h - m = h - m - [(m - h) - m],$$

d'où

$$(-1)^h (2h - m) = (-1)^h (h - m) + (-1)^{m-h} [(m - h) - m].$$

On peut donc écrire

$$S' = \sum_{h=1}^{h=m-1} (-1)^h (h - m) \\ = (m-1) - (m-2) + (m-3) - (m-4) + \dots + 2 - 1,$$

ou bien, en groupant les termes consécutifs deux à deux,

$$S' = 1 + 1 + \dots + 1,$$

le nombre des termes du second membre étant égal à $\frac{m-1}{2}$. Donc enfin

$$S' = \frac{m-1}{2}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — La suite (M) jouit encore des propriétés suivantes, dont je laisse au lecteur le soin de trouver les démonstrations :

1° *Dans la suite (M), un même nombre ne peut figurer plus d'une fois;*

2° *Un même nombre peut figurer deux fois, et cette circonstance se présente un nombre de fois égal à $\left[\frac{m}{4} \right]$.*

Ainsi, dans la suite prise comme exemple ($m = 9$), il y a $\left[\frac{9}{4} \right] = 2$ nombres qui figurent deux fois, à savoir les nombres 6 et 7.