

HENRI PICCIOLI

**Sur un procédé pour parvenir à
l'équation intrinsèque des lignes du
cylindre de révolution**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 402-405

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__402_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[03]

**SUR UN PROCÉDÉ POUR PARVENIR A L'ÉQUATION INTRINSÈQUE
DES LIGNES DU CYLINDRE DE RÉVOLUTION;**

PAR M. HENRI PICCIOLI, à Arpino.

La recherche de l'équation intrinsèque des courbes
qui sont tracées sur un cylindre de révolution peut
être rattachée aux formules

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dM_1}{ds} = \frac{M_2}{\rho}, \\ \frac{dM_2}{ds} = -\frac{M_1}{\rho} - \frac{M_3}{T} + \cos \theta_3, \\ \frac{dM_3}{ds} = \frac{M_2}{T} - \cos \theta_2, \end{array} \right.$$

qui lient les moments des directions principales d'une

courbe gauche C par rapport à une droite fixe r avec laquelle elles font respectivement les angles θ_1 , θ_2 , θ_3 (1).

A cet effet, rappelons que le carré de la distance d'un point à une droite égale la somme des carrés des moments de cette droite par rapport à trois droites orthogonales issues du point donné; l'expression $M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$ représentera donc le carré de la distance d'un point P de C à r .

La condition que P décrive une ligne appartenant à un cylindre de révolution d'axe r , se traduira ainsi :

$$(2) \quad M_2 \cos \theta_3 - M_3 \cos \theta_2 = 0,$$

relation qu'on obtiendra en annulant la dérivée par rapport à l'arc s de l'expression $M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$ et tenant compte des formules (1).

Il s'ensuit de là que :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une ligne appartienne à un cylindre de révolution ayant pour axe une droite donnée est que les plus courtes distances de la normale principale et de la binormale à l'axe soient entre elles comme les cotangentes des angles correspondants.

Posons maintenant

$$m_1 = M_2 \cos \theta_3 - M_3 \cos \theta_2,$$

$$m_2 = M_3 \cos \theta_1 - M_1 \cos \theta_3,$$

$$m_3 = M_1 \cos \theta_2 - M_2 \cos \theta_1;$$

(1) Voir ma Note Sur les hélices cylindriques dont les normales principales rencontrent une droite fixe (Nouv. Ann., avril 1902).

nous verrons aisément que m_1 , m_2 , m_3 satisfont aux relations

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dm_1}{ds} = \frac{m_2}{\rho} + \sin^2 \theta_1 \\ \frac{dm_2}{ds} = -\frac{m_1}{\rho} - \frac{m_3}{T} - \cos \theta_1 \cos \theta_2, \\ \frac{dm_3}{ds} = \frac{m_2}{T} - \cos \theta_1 \cos \theta_3. \end{cases}$$

Posant m_1 égal à zéro, et éliminant m_2 et m_3 , nous trouverons une relation du type

$$(a) \quad \begin{cases} A_1 \cos^2 \theta_1 + A_2 \cos^2 \theta_2 + A_3 \cos^2 \theta_3 + A_{12} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ + A_{23} \cos \theta_2 \cos \theta_3 + A_{13} \cos \theta_1 \cos \theta_3 + A = 0, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{\rho} - H_3 \quad (1), & A_2 &= -\frac{2}{\rho}, & A_3 &= 0; \\ A_{12} &= -T \frac{d\rho}{ds}, & A_{23} &= 0, & A_{13} &= 1 - \frac{2}{T}, & A &= H_3. \end{aligned}$$

En différentiant et en tenant compte des formules de Serret, on parviendra de là à une deuxième relation du même type

$$(b) \quad \begin{cases} B_1 \cos^2 \theta_1 + B_2 \cos^2 \theta_2 + B_3 \cos^2 \theta_3 + B_{12} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ + B_{23} \cos \theta_2 \cos \theta_3 + B_{13} \cos \theta_1 \cos \theta_3 + B = 0, \end{cases}$$

dont les coefficients seront liés à ceux de (a) par les

(1) Nous rappelons que H_3 n'est autre chose que l'expression

$$\frac{\rho}{T} + \frac{d}{ds} \left(T \frac{d\rho}{ds} \right),$$

qui, égale à zéro, donne l'équation intrinsèque des courbes sphériques.

formules

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{dA_1}{ds} - \frac{A_{12}}{\rho}, \\
 B_2 &= \frac{dA_2}{ds} + \frac{A_{12}}{\rho} + \frac{A_{23}}{T}, \\
 B_3 &= \frac{dA_3}{ds} - \frac{A_{23}}{T}, \\
 B_{12} &= \frac{dA_{12}}{ds} + 2 \frac{A_1}{\rho} - 2 \frac{A_2}{\rho} + \frac{A_{13}}{T}, \\
 B_{23} &= \frac{dA_{23}}{ds} - 2 \frac{A_2}{T} + \frac{A_{13}}{\rho} + \frac{A_3}{T}, \\
 B_{13} &= \frac{dA_{13}}{ds} - \frac{A_{12}}{T} - \frac{A_{23}}{\rho}, \\
 B &= \frac{dA}{ds}.
 \end{aligned}$$

En procédant ainsi nous parviendrons à une troisième relation dont les coefficients seront exprimables par les B comme les B le sont par les A.

Différentions encore jusqu'à obtenir *sept* relations de cette nature. Leur coexistence exige que l'on ait

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A \\ B_1 & B_2 & B_3 & \dots & B \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation cherchée : c'est une équation différentielle ordinaire du *huitième* ordre par rapport à ρ , et du *septième* par rapport à T. Elle est très compliquée. On peut la simplifier en remarquant que l'on a

$$A_1 + A_2 + A_3 + A = 0$$

et, par conséquent,

$$B_1 + B_2 + B_3 + B = 0,$$

et ainsi de suite.
