

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 381-384

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_381_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1930.

(1902, p. 288.)

x_1 étant une racine de l'équation

$$(1) \quad x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0,$$

$2 - x_1^2$ en est une autre. (A. PELLET.)

SOLUTION

Par M. AUDIBERT.

Si l'on pose $z = 2 - x^2$ ou $x = \pm (2 - z)^{\frac{1}{2}}$, la transformée en z s'annulera pour $z = 2 - x_1^2$.

La substitution donne sans ambiguïté l'égalité

$$[(2-x)^2 - 4(2-x) + 1]^2 = + \left[4(2-x)^{\frac{1}{2}} - (2-x)^{\frac{3}{2}} \right]^2,$$

et la réduction de cette formule conduit à l'équation

$$x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0,$$

identique à (1).

Autres solutions par MM. FRIZAC, N. PLAKHOWO et RUÏS Y CAZAS.

1939.

(1902, p. 479.)

Soient A et B deux points fixes, C un point du segment AB, Δ une tangente commune aux cercles de diamètres CA et CB, P la projection de C sur Δ :

1° La droite CP enveloppe l'hypocycloïde à quatre rebroussements dont deux sont en A et B.

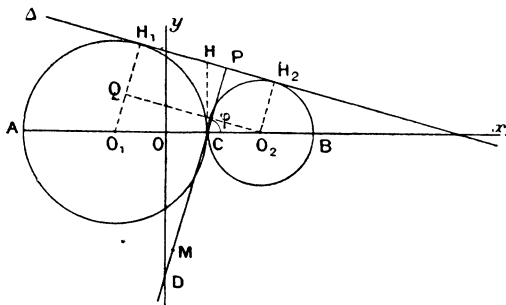
2° Le point P décrit une développante de cette hypocycloïde.

(E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. A.-H. COUVERT.

1° Soient O, O₁, O₂ les milieux de AB, AC, BC. Menons les



rayons de contact O₁H₁ et O₂H₂, et par O₂ menons O₂Q parallèle à Δ . Soit enfin D le point où CP rencontre la perpendiculaire Oy à AB. Les angles $\widehat{O_1O_2Q}$ et $\widehat{ODC}$ sont égaux comme

ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires. D'autre part :

$$OC = \frac{AC - CB}{2} = \frac{AC}{2} - \frac{CB}{2} = O_1H_1 - O_2H_2 = O_1Q.$$

Les deux triangles rectangles OCD et O_1O_2Q sont donc égaux. Il s'ensuit que les hypoténuses sont égales. Donc :

$$CD = O_1O_2 = \frac{AB}{2} = \text{const.}$$

La droite CD de longueur constante, dont les extrémités se déplacent sur deux droites rectangulaires, enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements. Les deux rebroussements situés sur AB sont bien A et B puisque

$$OA = OB = CD.$$

2° Soit M le point de contact de CP avec son enveloppe. Nous savons que l'arc BM d'hypocycloïde a pour valeur $\frac{3}{2}a \sin^2 \varphi$ en posant $CD = a$ et appelant φ l'angle de CD avec AB.

Mais d'après la théorie du centre instantané ce contact M se trouve au pied de la perpendiculaire abaissée du sommet du rectangle de côtés contigus OC, OD opposé à O sur CD. On voit donc que

$$MC = a \sin^2 \varphi.$$

Menons CH tangente commune en C; nous avons

$$CH = \frac{H_1H_2}{2} = \frac{O_2Q}{2} = \frac{a}{2} \sin \varphi$$

et

$$CP = CH \sin \varphi = \frac{a}{2} \sin^2 \varphi.$$

Par suite :

$$MP = MC + CP = a \sin^2 \varphi + \frac{a}{2} \sin^2 \varphi = \frac{3}{2} a \sin^2 \varphi = \text{arc BM},$$

MP étant égal à l'arc BM, le point P décrit une développante de l'hypocycloïde.

Autre solution par M. AUDIBERT.

1984.

(1903, p. 528.)

On donne un cercle de centre O et un point A. Soient M un point du plan et B un des points de rencontre de OM avec le cercle. Le lieu des points M tels que $\frac{MA}{MB} = \frac{OA}{OB}$ est un limaçon de Pascal.

(E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. LEZ.

On voit facilement que le lieu des points M est une conchoïde de cercle ou un limaçon de Pascal, suivant que le point A est à l'extérieur ou à l'intérieur du cercle O.

En effet, prenant pour axe des X la droite OA et pour axe des Y une perpendiculaire passant par le centre O, si $OA = d$, $OB = r$, on a

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad MB = OM \pm r = \sqrt{x^2 + y^2} \pm r$$

et

$$AM = \sqrt{y^2 + (d - x)^2};$$

par suite

$$\frac{\sqrt{y^2 + (d - x)^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} \pm r} = \frac{d}{r}.$$

Réduisant, on trouve pour le lieu des points M

$$(r^2 - d^2)(x^2 + y^2) - 2dr^2x = \pm 2d^2r\sqrt{x^2 + y^2}$$

ou

$$\left(x^2 + y^2 - \frac{2dr^2x}{r^2 - d^2}\right)^2 = \frac{4d^4r^2}{(r^2 - d^2)^2}(x^2 + y^2).$$

Or cette équation est celle d'une conchoïde

$$(x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2(x^2 + y^2),$$

dans laquelle on a

$$b = \frac{2dr^2}{r^2 - d^2}, \quad a = \frac{2d^2r}{r^2 - d^2}.$$

Autre solution par M. H. COUVERT.