

Certificats d'études supérieures

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 373-381

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_373_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL ET ANALYSE.

Bordeaux.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Trouver les surfaces, en coordonnées cartésiennes rectangulaires, telles que l'on ait*

$$\cos V = \frac{z}{a},$$

V étant l'angle que fait la normale au point x, y, z , avec l'axe des z .

2° *Étudier la convergence de la série*

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+p} - \frac{1}{p} \right);$$

(374)

démontrer que

$$f^2 + f' = \text{const.};$$

en déduire

$$f(z) = \pi \cot \pi z.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int \frac{(z+1)}{z^3(z-1)^2} e^z dz,$$

prise le long d'une circonférence ayant l'origine pour centre et un rayon égal à 2. (Novembre 1903.)

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — Intégrer l'équation

$$(y^2 - x^2 + 2xz) \frac{\partial z}{\partial x} + 2y(z-x) \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Mode de génération des surfaces représentées par l'intégrale générale en coordonnées rectangulaires. Déterminer celle de ces surfaces qui contient l'ellipse

$$x = 0, \quad y^2 + 4z^2 = 4a^2$$

et chercher ses lignes de plus grande pente en supposant le plan XOY horizontal.

SOLUTION.

Intégrale générale

$$x^2 + y^2 - 2xz = y \varphi(z).$$

Les surfaces correspondantes sont engendrées par un cercle dont le plan est parallèle à XOY, dont le centre est dans le plan $z = x$, et qui rencontre l'axe des z . La surface particulière demandée a pour équation

$$(x^2 + y^2 - 2xz)^2 = 4y^2(a^2 - z^2).$$

Ses lignes de niveau se projettent sur XOY suivant des cercles de rayon a passant par l'origine; leurs trajectoires orthogonales sont les projections des lignes de pente.

Soient

C le centre d'un des cercles;
OA le diamètre passant au point fixe;
M un point de sa circonférence.

La trajectoire qui passe en M est tangente au rayon MC et l'on a

$$r \frac{d\theta}{dr} = \text{tang OMC} = \text{tang MOA} = \frac{MA}{MO} = \frac{\sqrt{4a^2 - r^2}}{r}.$$

(Juillet 1904.)

Lille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. La fonction $f(z)$ étant supposée uniforme dans tout le plan, démontrer que si l'équation

$$f(z) = C$$

n'a, pour aucune valeur du second membre, un nombre illimité de racines, $f(z)$ est une fonction rationnelle.

(Voir, par exemple, DEMARTRES, *Cours d'Analyse*, II^e Partie, p. 70-71.)

II. 1^o Étant donnés trois axes rectangulaires Ox , Oy , Oz et un cône de révolution de sommet O et d'axe Oz , déterminer sur ce cône les courbes qui font en chaque point un angle donné i avec la génératrice passant en ce point;

2^o Γ désignant une de ces courbes, rectifier la courbe Γ , calculer l'aire de la surface du cône limité par Γ et par deux génératrices;

3^o Calculer le rayon de courbure et le rayon de torsion en un point de Γ ; indiquer la relation qui lie ces deux quantités;

4^o Déterminer les surfaces qui passent par la courbe Γ et qui coupent orthogonalement soit les cônes de révolution de sommet O et d'axe Oz , soit les cylindres de révolution autour de Oz ;

5^o Trouver les lignes asymptotiques de la dernière surface obtenue.

SOLUTION.

1° Soient

α l'angle des génératrices du cône avec xOy ;
 r, z, ρ les distances d'un point quelconque M de Γ au sommet
 du cône, au plan xOy et à l'axe Oz ;
 ds l'arc élémentaire de Γ .

On a

$$dr = ds \cos i.$$

On en déduit que les projections sur xOy des courbes Γ sont les spirales logarithmiques

$$(S) \quad \rho = a e^{\varphi \cot i \cos \alpha}.$$

Comme $\frac{dz}{ds} = \sin \alpha \cos i = \text{const.}$, les courbes Γ sont des hélices tracées sur des cylindres ayant pour sections droites les spirales S;

2° Si M_0 et M sont deux points quelconques d'une courbe Γ , on a

$$\begin{aligned} \text{arc } M_0 M &= \frac{OM - OM_0}{\cos i}, \\ \text{aire } M_0 OM &= \tan i (\overline{OM}^2 - \overline{OM_0}^2); \end{aligned}$$

3° Γ étant une hélice cylindrique, on a

$$\frac{R}{T} = \text{const.} = \tan \lambda \quad \text{avec} \quad \sin \lambda = \sin \alpha \cos i.$$

D'ailleurs

$$R = r - \frac{\cos \alpha}{\sin i \cos i \cos \lambda}.$$

Les rayons de courbure et de torsion varient proportionnellement à la distance du point M au sommet du cône;

4° Les surfaces considérées ont respectivement pour équation aux dérivées partielles :

$$(px + qy)z + x^2 + y^2 = 0, \quad px + qy = 0,$$

et pour équation générale

$$x^2 + y^2 + z^2 = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad z = g\left(\frac{y}{x}\right),$$

ou, en coordonnées polaires de l'espace,

$$r = F(\varphi), \quad z = G(\varphi).$$

Celles de ces surfaces qui passent par une courbe Γ sont

$$r = \frac{a}{\cos \alpha} e^{\varphi \cot \alpha \cos \alpha}, \quad z = a \tan \alpha e^{\varphi \cot \alpha \cos \alpha};$$

5° La dernière surface est un conoïde d'axe Oz , dont les asymptotiques sont, avec les génératrices rectilignes, les courbes ayant pour projections sur xOy les spirales logarithmiques

$$\rho = A e^{\frac{1}{2} \varphi \cot \alpha \cos \alpha}. \quad (\text{Juillet 1904.})$$

Lyon.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Construire une surface de révolution telle qu'entre les deux rayons de courbure principaux en un point, ρ et ρ' , on ait la relation

$$\rho' = K \rho^m \quad (K, m = \text{const.}).$$

II. Former et intégrer l'équation aux dérivées partielles du premier ordre, qui définit les conoïdes droits.

III. Soit

$$\Omega = \int e^{iz} R(z) dz,$$

$z = \rho e^{i\theta}$, où z varie de façon que $\rho = \text{const.}$ et θ varie de 0 à π . $R(z)$ est le quotient de deux polynômes en z , où le numérateur a le degré n et le dénominateur a le degré $n+2$. On demande la limite de Ω pour $\rho = \infty$. Appliquer le résultat au calcul de l'intégrale réelle

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(1+x^2)^3}.$$

(Calcul diff. et intégral, novembre 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Addition de la fonction pu .

II. Construire la courbe plane C , telle que $a^2 = x\rho$, où a est une constante, ρ le rayon de courbure, x l'abscisse.

(378)

Coordonnées rectangulaires. Par hypothèse, C passe par l'origine et y fait un angle donné avec l'axe des x.

III. Construire la surface

$$x = 9u^2 - 12uv + 14v^2 + 14v,$$

$$y = 5u^2 - 2uv + 14u,$$

$$z = 6u^2 + 6uv + 7v^2 + 42u + 28v.$$

(Analyse, novembre 1903.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — Une surface étant rapportée à trois axes rectangulaires, le plan tangent au point $M(x, y, z)$ coupe l'axe OZ au point T , et le plan XOY suivant la droite AB .

1° Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces S telles que $OT = a \times z$, où a est une constante donnée;

2° Intégrer l'équation obtenue et former l'équation générale des surfaces S ;

3° Soit P la projection de M sur le plan XOY . Déterminer la fonction arbitraire, qui entre dans l'équation des surfaces S , de façon que la droite AB forme avec OP un angle constant;

4° Déterminer les lignes asymptotiques de ces dernières surfaces.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère la courbe représentée en coordonnées rectangulaires par les équations

$$x = 3z^2,$$

$$y = 6z^3.$$

Trouver les expressions de la courbure et de la torsion en chaque point de la courbe, en fonction de z . Prouver que la courbe est une hélice tracée sur un certain cylindre. Quel est ce cylindre?

(Juillet 1904.)

Rennes.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. On considère l'intégrale

$$U_n(x) = \int_0^1 (1-t^2)^{n-1} \cos(tx) dt,$$

où n désigne une constante au moins égale à 1 et où t, x désignent des variables réelles indépendantes.

1° Établir la relation

$$\frac{d^2 U_n}{dx^2} + U_n = U_{n+1},$$

puis, à l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'on a

$$U_{n+1}(x) = -\frac{2n}{x} \frac{d}{dx} [U_n(x)]$$

et que la fonction $U_n(x)$ est une solution de l'équation différentielle

$$(E_n) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2n}{x} \frac{dy}{dx} + y = 0;$$

2° n n'étant plus assujettie à la condition $n \geq 1$, vérifier, en différentiant l'équation (E_n) , que, si y est une solution de (E_n) , la fonction $\frac{1}{x} \frac{dy}{dx}$ est une solution d'une équation différentielle de même forme (E_{n+1}) .

Montrer que l'on peut, par un calcul de proche en proche, obtenir l'intégrale générale de (E_n) , dans le cas où n est un nombre entier et positif;

3° Démontrer que si y est une solution de l'équation différentielle (E_n) , la fonction z définie par l'égalité

$$y = z x^{1-2n}$$

est une solution d'une équation différentielle de même forme (E_{1-n}) ;

4° Déterminer les coefficients $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ des séries

$$1 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \dots + a_p x^{2p} + \dots, \\ x^{1-2n} (1 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + \dots + b_p x^{2p} + \dots),$$

de façon que les fonctions définies par ces séries soient deux solutions de l'équation différentielle (E_n) .

II. 1° On donne la courbe (C) de l'espace et sa projection orthogonale (C_1) sur le plan xOy . On appelle R le rayon de courbure de (C) en un point M et R_1 le rayon de courbure de (C_1) au point M_1 projection de M .

Démontrer que l'on a la relation

$$\frac{R_1}{R} = \frac{\cos^2 i}{\cos I},$$

i et I étant les angles de la tangente et du plan osculateur en M à (C) avec le plan Oxy;

2° En remarquant que (C) et (C₁) sont tracées sur un même cylindre, en utilisant le théorème de Meusnier et les propriétés de l'indicatrice de Dupin, ne peut-on pas obtenir une relation entre R et R₁?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère le conoïde droit qui, rapporté à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, a pour équation*

$$z = \frac{cy}{\pm \sqrt{a^2 - x^2}},$$

et l'on demande de calculer :

1° L'aire A(z₁) de l'ellipse suivant laquelle la surface est coupée par le plan z = z₁;

2° Le volume du solide limité par la surface et par les plans z = 0, z = c;

3° L'intégrale

$$\int_0^c z^2 A(z) dz;$$

4° Les intégrales doubles

$$\int \int x^2 (c - z) dx dy, \quad \int \int y^2 (c - z) dx dy$$

étendues à la région du plan qui est située à l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, et dans l'angle des coordonnées positives.

(Juillet 1904.)

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Construire les courbes qui, rapportées à deux axes de coordonnées Ox, Oy, vérifient l'équation différentielle*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2}{y^3} - \frac{2}{y^5}.$$

II. On considère le paraboloïde représenté par les équations

$$x = mu,$$

$$y = \frac{v}{m},$$

$$z = mau^2 + \frac{b}{m} v^2,$$

qui déterminent les coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, z d'un de ses points en fonction de deux paramètres u et v et dans lesquelles a, b, m sont trois constantes réelles.

Exprimer en fonction de u et v l'inverse k du produit des rayons de courbure principaux; montrer que k ne dépend pas de m , mais seulement de a, b, u, v . Supposant que u, v prennent des valeurs déterminées u_0, v_0 différentes de zéro, déterminer a et b de façon que k soit maximum; montrer que la valeur correspondante de l'expression k est la plus grande des valeurs qu'elle peut prendre lorsque a et b varient, u et v conservant leurs valeurs u_0 et v_0 .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{(x^4 + 1) dx}{(x^2 + 4)^2 (x - 1)^3}.$$

(Juillet 1904.)