

T. LEMOYNE

Sur les cubiques nodales circulaires

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 357-360

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__357_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[M¹5k₂]

SUR LES CUBIQUES NODALES CIRCULAIRES;

PAR M. T. LEMOYNE.

Cette Note diffère des deux premières en ce que les propriétés qu'elle renferme ne dépendent pas du théorème de Chasles.

Un cercle passant par le point double O d'une cubique circulaire coupe cette courbe en deux points M, M' à distance finie. Dès lors, si l'on assujettit ce cercle à passer par un second point fixe ω du plan, au point M ne correspondra qu'un point M', à la droite OM, qu'une droite OM' et, comme la correspondance de ces droites est réciproque, elle est involutive.

1. *Étant donnée une cubique circulaire nodale de point double O et un faisceau de cercles passant par le point double O et un point fixe ω du plan, les droites qui joignent O aux couples de points où chaque cercle coupe la cubique forment un faisceau en involution.*

2. *Il y a deux cercles qui passent par le point double d'une cubique circulaire, un point fixe ω du plan et sont tangents à la courbe.*

La réciproque du théorème 1 est vraie :

3. *Lorsque par le point double d'une cubique nodale on mène des couples de cordes en involution OM, OM'; ON, ON'; OP, OP'; ... les cercles OMM', ONN', ... ont un second point commun.*

Désignons en effet par ω l'intersection des cercles OMM' , ONN' . Les droites OQ , OQ' qui joignent le point double aux points d'intersection avec la cubique d'un cercle quelconque passant par O et ω engendrent, lorsque ce cercle varie, une involution de droites qui coïncide avec celle que nous avons considérée dans le théorème 3, puisqu'elles ont en commun deux couples de droites homologues OM , OM' ; ON , ON' .

On en déduit, quand l'involution est formée de droites rectangulaires, que :

4. Le cercle qui a pour diamètre une corde d'une cubique circulaire vue du point double sous un angle droit coupe en un point fixe la perpendiculaire abaissée du point double sur l'asymptote.

Si AB est la corde vue du point double sous un angle droit, OA , OB décrivent lorsque AB varie une involution dont les rayons doubles sont les droites isotropes. Quand OA est parallèle à l'asymptote, A est à l'infini sur la courbe, OB perpendiculaire à l'asymptote et le cercle OAB , qui coupe la droite de l'infini en ses trois points d'intersection avec la courbe, se décompose en cette droite et la droite OB . Le point fixe ω , par lequel passe le cercle ayant pour diamètre une corde vue du point double sous un angle droit, est donc sur la perpendiculaire OB abaissée du point double sur l'asymptote et les milieux des cordes considérées sont sur une parallèle à cette droite.

D'ailleurs, d'après le théorème 2 de notre Note : *Sur quelques applications d'un théorème de Chasles aux cubiques circulaires*, les bissectrices OM , ON des tangentes au point double rencontrent la courbe en des points M et N tels que les tangentes en ces points sont

parallèles à l'asymptote; la corde MN est évidemment vue du point double sous un angle droit, son milieu se trouve sur la parallèle à l'asymptote équidistante des tangentes en M et N; par conséquent :

5. *Les milieux des cordes d'une cubique circulaire vues du point double sous un angle droit sont sur la droite équidistante des tangentes à la courbe parallèles à l'asymptote.*

Si l'involution du théorème 3 est formée de couples de droites OM, OM'; ON, ON'; ... également inclinées sur une sécante quelconque OA issue du point double, les cercles OMM', ONN', ... passent, d'après ce théorème, par un second point commun ω , mais les droites isotropes sont homologues dans l'involution; le cercle correspondant à ces droites touche la courbe aux points cycliques, le point d'intersection des tangentes en ces points, qui est le foyer singulier de la cubique, est par suite aussi le centre de ce cercle.

Le foyer singulier de la courbe est donc sur la droite lieu des centres des cercles OMM', ONN', Toutes les droites des centres obtenues comme la précédente lorsqu'on substitue à OA des sécantes OA', OA'', ... concourent en ce point.

Cette propriété est peut-être une des plus caractéristiques du foyer singulier d'une cubique nodale circulaire dont elle donne aussi une construction.

6. *Si par le point double d'une cubique circulaire on mène une sécante quelconque OA et que l'on trace par O des couples de droites OM, OM'; ON, ON'; ... également inclinées sur OA, les cercles OMM', ONN', ... ont leurs centres sur une droite qui passe par le foyer singulier de la courbe.*

Lorsque la sécante tourne autour de O le second point de rencontre des cercles OMM' , ONN' , ... décrit alors un cercle qui a pour centre le foyer singulier et qui passe par le point double.

Considérons en particulier l'involution des droites OM , OM' , ... également inclinées sur la bissectrice de l'angle des tangentes au point double, le couple des tangentes nodales appartient à cette involution, mais le cercle correspondant se réduit au point O , ce qui montre que les cercles OMM' , ONN' , ... ont leurs centres sur une droite passant par O . On aurait pu le voir en appliquant la réciproque du théorème 7 de notre Note : *Sur quelques applications d'un théorème de Chasles aux cubiques circulaires*. On montre très facilement que cette droite est la symétrique, par rapport à la bissectrice de l'angle des tangentes nodales, de la perpendiculaire à l'asymptote menée par O . Donc :

7. Le foyer singulier d'une cubique nodale circulaire est sur la droite $O\Delta$ symétrique de la perpendiculaire à l'asymptote abaissée du point double par rapport à la bissectrice de l'angle des tangentes nodales.

Nous obtenons ainsi en combinant ce théorème avec le théorème 6 une construction assez simple du foyer singulier de la cubique.

(Extrait d'un Mémoire couronné par l'Académie des Sciences de Toulouse.)
