

J. RICHARD

## **Sur la congruence commune à deux complexes du second ordre**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 4 (1904), p. 352-355

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1904\\_4\\_4\\_352\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_352_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

---

[N<sup>2</sup>1a]

**SUR LA CONGRUENCE COMMUNE A DEUX COMPLEXES  
DU SECOND ORDRE;**

PAR M. J. RICHARD,  
Professeur à Dijon.

---

J'indique dans cette Note un moyen simple de déterminer l'ordre et la classe de la surface focale pour la congruence des droites appartenant à la fois à deux complexes du second ordre.

Soit une droite ayant pour équations

$$r_3 y - r_2 z = r_4,$$

$$r_1 z - r_3 x = r_5,$$

$$r_2 x - r_1 y = r_6,$$

avec la condition

$$r_1 r_4 + r_2 r_5 + r_3 r_6 = 0.$$

Soient

$$\sum a_{ik} r_i r_k = 0$$

et

$$\sum b_{ik} r_i r_k = 0$$

les équations de deux complexes. Pour avoir le degré de la surface focale de la congruence commune, cherchons en combien de points cette surface est coupée par une droite, que nous pouvons supposer être l'axe des  $z$ . Les points de  $Oz$  appartenant à la surface focale sont les points pour lesquels les cônes des deux complexes sont tangents.

Soient  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = \alpha$  les coordonnées d'un point de l'axe des  $z$ . On obtiendra les cônes des complexes, relatifs à ce point, en remplaçant les six quantités  $r_{ik}$  par les suivantes :

$$x, \quad y, \quad z - \alpha, \quad -\alpha y, \quad \alpha x \quad \text{et} \quad \text{zéro.}$$

Transportant ensuite l'origine au sommet du cône, on mettra  $z$  au lieu de  $z - \alpha$ . On obtient ainsi l'équation

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) = & (a_{11} + 2a_{25}\alpha + a_{55}\alpha^2)x^2 \\ & + (a_{22} - 2a_{24}\alpha + a_{44}\alpha^2)y^2 + a_{33}z^2 \\ & + 2(a_{23} - a_{34}\alpha yz) + 2(a_{13} + a_{35}\alpha)zx \\ & + 2(a_{12} - a_{14}\alpha + a_{45}\alpha^2)xy = 0. \end{aligned}$$

On aura pour le cône du second complexe une équation analogue, où la lettre  $a$  est remplacée par la lettre  $b$ ,

$$\Psi(x, y, z) = 0.$$

En écrivant que l'équation

$$\Phi + \lambda \Psi = 0$$

représente deux plans, on a une équation du troisième degré en  $\lambda$  et du quatrième degré en  $\alpha$ .

Pour qu'une équation du troisième degré ait une racine double, on a une condition qui est du quatrième degré par rapport aux coefficients. Ceux-ci étant du quatrième degré en  $\alpha$ , on en conclut que sur l'axe des  $z$  il y a 16 points pour lesquels les deux cônes sont tangents. La surface focale de notre congruence est donc du seizième ordre. Elle est aussi de seizième classe par le raisonnement corrélatif.

Nous allons retrouver ce résultat d'une autre façon.

On sait qu'on nomme *rang d'une congruence* le nombre de plans passant par une droite et tels que deux des droites de la congruence situées dans l'un de ces plans se coupent sur la droite. On peut dire aussi que le rang est le nombre de points d'une droite tels que deux droites de la congruence concourant en un de ces points soient dans un même plan avec la droite. Le rang est ainsi corrélatif à lui-même.

Or, cherchons le rang de la congruence précédente.

Reprenons l'équation ci-dessus :

$$\Phi + \lambda \Psi = 0.$$

Nous devons écrire qu'elle se décompose en deux plans dont l'un contient l'axe des  $z$ .

Pour qu'il en soit ainsi il faut qu'elle soit satisfaite par  $x = 0$ ,  $y = 0$ , ce qui donne

$$a_{33} + \lambda b_{33} = 0.$$

Tirons  $\lambda$  de cette équation, et portons dans l'équation

en  $\lambda$  du troisième degré exprimant que  $F + \lambda \Phi = 0$  se décompose en deux plans.

On a ainsi une relation du quatrième degré en  $\alpha$ .

Il y a donc quatre points sur  $Oz$  pour lesquels deux droites communes aux deux cônes des deux complexes sont dans un même plan passant par cet axe.

Le rang cherché est donc quatre.

En général, pour une congruence d'ordre  $m$  ( $m$  droites passant par un point), de classe  $p$  ( $p$  droites situées dans un plan), de rang  $r$ , l'ordre et la classe de la surface focale sont respectivement

$$2m(p-1) - 2r,$$

$$2p(m-1) - 2r;$$

ici  $m = 4$ ,  $p = 4$ ,  $r = 4$ ; donc l'ordre et la classe de la surface focale sont  $24 - 8$  ou  $16$ .