

Certificats d'études supérieures

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 326-331

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_326_0>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_326_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES.

ÉLÉMENTS GÉNÉRAUX DE MATHÉMATIQUES.

Bordeaux.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Ox, Oy, Oz étant trois axes rectangulaires, calculer le volume limité par le plan des xy , par la surface de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et par la surface du cylindre

$$\frac{2x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} = 1.$$

II. On considère les sphères ayant pour centres les différents points d'une courbe C et dont les rayons sont fonction du paramètre qui fixe la position des points de C .

Soient M l'enveloppe des caractéristiques de cette famille de sphères à un paramètre et μ le point de M qui est situé sur la sphère de la famille ayant pour centre le point γ de C .

Montrer que la droite polaire de la courbe M relative au point μ passe par le point γ .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Intégrer l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = \cos 3t.$$

(Novembre 1903.)

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° Étant donnés deux axes rectangulaires OX, OY et un point A sur OY , déterminer une courbe C telle que, si la tangente en un de ses points M

rencontre OX en T, on ait $MT = TA$. Trouver les trajectoires orthogonales C' des courbes C.

Ayant constaté que les lignes C et C' sont des courbes à centre, on prend, de toutes les manières possibles, une courbe C et une courbe C' telles que la droite qui joint leurs centres soit parallèle à la bissectrice de XOY : déterminer le lieu de leurs points communs et l'aire comprise entre ce lieu et la demi-droite OY.

SOLUTION.

$$(c) \quad x^2 + y^2 - 2cy + a^2 = 0,$$

$$(c') \quad x^2 + y^2 - 2c'x - a^2 = 0.$$

Le dernier lieu a pour équation

$$r^2 = a^2 \tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right),$$

et l'aire demandée est

$$\frac{1}{4} a^2 \text{Log } 2.$$

2° Calculer la latitude d'un lieu sachant qu'on y voit se coucher au même instant deux étoiles d'ascensions droites α , α' et de déclinaisons δ , δ' . (Juillet 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. On donne un cylindre dont l'équation par rapport à trois axes rectangulaires est

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0,$$

et un cône dont le sommet est à l'origine et dont les génératrices forment avec OZ un angle de 45° .

1° Déterminer les projections sur Oxz et Oyz de l'intersection C des deux surfaces.

2° Calculer le volume V compris à l'intérieur du cylindre, entre le cône et le plan des xy, du côté des z positifs.

3° Évaluer les aires A, A' des portions de surfaces, cylindrique et conique, qui limitent le volume précédent.

4° Trouver et construire le lieu des traces des tangentes à C sur le plan Oxz.

II. Un point m est attiré vers le point fixe O par une force $\frac{2}{5} \frac{ma^6}{r^5}$; r_0 est égal à a ; v_0 , aussi égale à a , fait avec le prolongement de r_0 un angle aigu dont le sinus est $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Trajectoire du point m ; loi de son mouvement.

SOLUTION.

$$1. \quad V = \frac{32}{9} a^3, \quad A = 8 a^2, \quad A' = \pi a^2 \sqrt{2}.$$

$$4^o \quad z^2 = \frac{x^3}{2(x-a)}, \quad \text{asymptotes } z = \pm \frac{2x+a}{2\sqrt{2}},$$

points parasites de $x = a$ à $x = 2a$.

$$II. \quad v^2 = \frac{1}{5} \left(\frac{a^6}{r^4} - a^2 \right) + a^2 = \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{4a^4}{5r^2},$$

$$dt = \frac{\sqrt{5}}{a^2} \frac{r^2 dr}{2r^2 - a^2}, \quad d\theta = \frac{2a dr}{2r^2 - a^2}$$

(cercle et droite asymptotiques).

ÉPREUVE PRATIQUE. — On observe deux étoiles, de déclinaisons (δ, δ') , aux instants où leurs azimuts passent par un minimum; ces azimuts minima, rapportés à une origine quelconque, sont α, α' . Calculer l'azimut de la méridienne et la latitude du lieu de l'observation.

(Novembre 1903.)

Lille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — On considère la courbe plane décrite par un point mobile M dont les coordonnées rectangulaires sont exprimées en fonction du temps par les deux équations

$$(1) \quad x = kt^3, \quad y = kt^3 - at.$$

1° Construire cette courbe; déterminer ses points à l'infini, ses points singuliers, ses points d'inflexion.

2° Donner l'expression du rayon de courbure en fonction de t , puis de x . Quelle relation faut-il supposer entre les constantes a et k pour que le rayon de courbure soit une fonction rationnelle de l'abscisse?

3° La cubique (1) présente une boucle OA. On demande



l'aire de cette boucle, le volume qu'elle engendre en tournant autour de Ox .

4° Rectifier la courbe (1). On trouve que l'arc s'exprime par une intégrale elliptique; quelle relation faut-il supposer entre a et k pour que l'arc soit une fonction rationnelle de t ?

5° Cette condition étant supposée remplie, trouver les coordonnées du point B de la courbe telle que l'arc AB soit égal à la demi-longueur de la boucle.

6° Trouver toutes les courbes planes dont le rayon de courbure R est une fonction linéaire $mx + n$ de l'abscisse. Peut-on déterminer m , n de manière à retrouver parmi les solutions la cubique particulière définie au 2°?

MÉCANIQUE. — Théorie du pendule composé. Application au cas d'un parallélépipède rectangle homogène, oscillant autour d'une de ses arêtes. (Juillet 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — Étant donné un système d'axes rectangulaires Ox , Oy , on considère les courbes C telles que l'ordonnée à l'origine de la tangente au point d'abscisse x soit égale à kx^n , k désignant une constante et n un nombre positif.

1° Trouver l'équation générale des courbes satisfaisant à la condition énoncée.

2° Construire celles de ces courbes qui correspondent aux valeurs 3 et 4 du nombre n .

3° On considère l'arc déterminé sur l'une des courbes C par l'origine et par un point quelconque A; calculer l'aire limitée par cet arc et par la corde OA, ainsi que le

volume engendré par cette aire quand elle tourne autour de l'un des axes de coordonnées.

4° Le nombre n étant supposé plus grand que 1, on considère la courbe γ de la famille C tangente à Ox en O : trouver l'équation générale des courbes telles que la tangente en un point quelconque P à l'une de ces courbes soit perpendiculaire sur la tangente à γ au point d'intersection de cette dernière courbe et de la parallèle à Oy menée par P ; montrer que, pour une valeur particulière de n , ces courbes sont des hyperboles équilatères.

5° Le nombre n étant supposé entier, d'un point quelconque R du plan on peut mener, à une courbe C quelconque, n tangentes dont les points de contact sont $T_1, T_2, \dots, T_n$; montrer que, si n est supérieur à 2, la somme des aires des cercles engendrés par les points $T_1, \dots, T_n$, quand ils tournent autour de Ox , est égale à n^2 fois l'aire du cercle engendré par le centre de gravité du polygone $T_1 T_2 \dots T_n$.

MÉCANIQUE. — 1° Expression analytique du travail élémentaire d'une force.

2° Expression analytique du travail total dans le cas d'un champ où la force dérive d'un potentiel.

3° Propriétés des surfaces équipotentiellles.

(Novembre 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — On considère la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est

$$(1) \quad \rho^2 = a^2 \frac{\omega}{\pi - \omega},$$

a désignant une longueur quelconque.

1° Construire cette courbe.

2° Calculer l'aire limitée par un arc de cette courbe et par les deux rayons vecteurs qui joignent le pôle aux extrémités de l'arc.

3° L'aire précédente est supposée recouverte d'une couche infiniment mince de matière pesante dont la densité est, en chaque point, inversement proportionnelle à la distance de ce point au pôle; calculer la masse totale de la matière qui recouvre l'aire donnée.

4° Lorsque a varie, l'équation (1) représente une famille de courbes; déterminer les trajectoires orthogonales des courbes de cette famille.

MÉCANIQUE. — 1° Définir l'accélération d'un point dans le cas général, et déterminer ses composantes suivant les axes de coordonnées.

2° Montrer que l'accélération est située dans le plan osculateur à la trajectoire, et déterminer ses composantes tangentielle et normale.

(Candidats au diplôme d'ingénieur-électricien, 1903.)