

LELIEUVRE

Sur un théorème de la théorie des surfaces

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 309-313

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__309_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[05h]

SUR UN THÉORÈME DE LA THÉORIE DES SURFACES;

PAR M. LELIEUVRE.

Le théorème démontré par M. Bricard dans le numéro d'août 1903 de ce Journal s'établit aisément par la méthode cinématique; pour faire la démonstration, j'emploierai les procédés du *Calcul géométrique* de Grassmann : ce sera un nouvel exemple des avantages qu'ils présentent.

Soit une surface rapportée à ses lignes de courbure

$$u = \text{const.} \quad \text{et} \quad v = \text{const.}$$

Je considère au point M de la surface le trièdre trirectangle formé par une arête normale à la surface en ce point, et deux autres arêtes tangentes aux lignes de

courbure qui se coupent en M. J'appellerai I un vecteur unité porté sur l'arête normale, J un autre sur l'arête tangente à $v = \text{const.}$, K un troisième sur l'arête tangente à $u = \text{const.}$; puisque les arêtes qui portent J et K sont tangentes aux lignes coordonnées, on doit avoir pour les dérivées géométriques $\frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v}$:

$$(I) \quad \frac{\partial M}{\partial u} = \xi J, \quad \frac{\partial M}{\partial v} = \xi_1 K.$$

D'autre part, si l'on rapporte les dérivées géométriques des vecteurs I, J, K au trièdre que forment ces vecteurs, on voit immédiatement par un calcul très simple qu'en vertu des relations fondamentales

$$I^2 = J^2 = K^2 = 1 \quad (1), \quad J | K = K | I = I | J = 0,$$

ces dérivées géométriques ont des valeurs de la forme suivante :

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial I}{\partial u} = rJ - qK, & \frac{\partial I}{\partial v} = r_1J - q_1K, \\ \frac{\partial J}{\partial u} = pK - rI, & \frac{\partial J}{\partial v} = p_1K - r_1I, \\ \frac{\partial K}{\partial u} = qI - pJ, & \frac{\partial K}{\partial v} = q_1I - p_1J. \end{array} \right.$$

On trouve d'ailleurs la signification cinématique habituelle des coefficients $\xi, \xi_1, p, q, r, p_1, q_1, r_1$, en formant à l'aide des équations précédentes l'expression de la vitesse d'un point P quelconque de l'espace, de coordonnées x, y, z par rapport au trièdre considéré, soit

$$P = M + xI + yJ + zK;$$

(1) Je désigne par I^2 , suivant l'usage, le produit $I | I$ (voir BURALIFORTI, *Introduction à la Géométrie différentielle*, Gauthier-Villars, 1897).

on aura successivement

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial u} &= \frac{\partial M}{\partial u} + \Sigma x \frac{\partial I}{\partial u} + \Sigma I \frac{\partial x}{\partial u} \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} + qz - ry \right) I + (\xi + rx - pz) J + (py - qx) K, \\ \frac{\partial P}{\partial v} &= \frac{\partial M}{\partial v} + \Sigma x \frac{\partial I}{\partial v} + \Sigma I \frac{\partial x}{\partial v} \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y \right) I + (r_1 x - p_1 z) J + (\xi_1 + p_1 y - q_1 x) K.\end{aligned}$$

Par conséquent p, q, r sont les composantes suivant les arêtes du trièdre de la rotation instantanée de ce trièdre quand u seul varie, et ϕ, ξ, σ sont les composantes correspondantes de translation; ξ_1, p_1, q_1, r_1 sont les quantités analogues quand v seul varie.

Ceci posé, j'exprime que la ligne $u = \text{const.}$ est une ligne de courbure : il faut et il suffit que la vitesse d'un point $M + \rho I$ de la normale, quand u seul varie, soit suivant cette normale; or cette vitesse est

$$\frac{\partial(M + \rho I)}{\partial u} = \xi J + \rho(rJ - qK) + I \frac{\partial \rho}{\partial u},$$

d'où

$$\xi + \rho r = 0 \quad \text{et} \quad q = 0;$$

la première de ces relations détermine ρ .

On aurait de même, avec la ligne de courbure $v = \text{const.}$,

$$\xi_1 - \rho_1 q_1 = 0 \quad \text{et} \quad r_1 = 0,$$

et la première de ces relations fait connaître l'autre rayon de courbure principal ρ_1 .

Enfin, en exprimant la compatibilité des systèmes (I) et (II) par l'égalité des dérivées partielles secondes prises successivement par rapport à u et v , on retrouve, sous les conditions $q = r_1 = 0$, les équations connues

(voir DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*)

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1 \xi = \frac{\partial \xi_1}{\partial u}, \quad -p \xi_1 = \frac{\partial \xi}{\partial u}, \\ pq_1 = \frac{\partial r}{\partial v}, \quad -rp_1 = \frac{\partial q_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} + rq_1 = 0. \end{array} \right.$$

Remarquons qu'on passe d'une ligne de courbure à l'autre en échangeant u et v , J et K , ξ et ξ_1 , r et $-q_1$, p et $-p_1$.

Vérifions maintenant la proposition de M. Bricard : je forme le plan Π osculateur en M à la ligne $v = \text{const.}$; pour cela je calcule le produit progressif

$$M \frac{\partial M}{\partial u} \frac{\partial^2 M}{\partial u^2} = \xi MJ \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} J + \xi \frac{\partial J}{\partial u} \right) = \xi^2 MJ \frac{\partial J}{\partial u}.$$

On prendra alors

$$\Pi = MJ \frac{\partial J}{\partial u} = MJ(pK - rI) = M(pJK + rIJ);$$

par suite le vecteur $N = pI + rK$ est normal au plan Π : c'est le vecteur représentatif de la rotation instantanée $p, 0, r$; alors, la caractéristique du plan Π quand v seul varie sera perpendiculaire aux vecteurs N et $\frac{\partial N}{\partial v}$; or, on a

$$\frac{\partial N}{\partial v} = I \frac{\partial p}{\partial v} + K \frac{\partial r}{\partial v} - pq_1 K + r(q_1 I - p_1 J),$$

c'est-à-dire en vertu des équations (a)

$$\frac{\partial N}{\partial v} = \frac{\partial p_1}{\partial u} I - rp_1 J.$$

On a alors

$$N \frac{\partial N}{\partial v} = r \left(p_1 r JK + \frac{\partial p_1}{\partial u} KI - pp_1 IJ \right);$$

par suite la *caractéristique du plan sera parallèle au vecteur* $\left| N \frac{\partial N}{\partial v} \right|$, c'est-à-dire à

$$U = p_1 r I + \frac{\partial p_1}{\partial u} J - p p_1 K.$$

Les permutations de lettres indiquées ci-dessus donnent aussitôt la direction de l'autre caractéristique à considérer, v variant seul : elle est parallèle au vecteur

$$V = p q_1 I - p p_1 J - \frac{\partial p}{\partial v} K.$$

La perpendicularité des vecteurs U et V s'exprime alors par la condition

$$p p_1 r q_1 - p p_1 \frac{\partial p_1}{\partial u} + p p_1 \frac{\partial p}{\partial v} = 0,$$

qui se réduit à l'une des équations (a)

$$\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} + r q_1 = 0.$$

La proposition est donc vérifiée.

On aurait pu opérer autrement en calculant la caractéristique même du plan Π , c'est-à-dire son intersection avec le plan $\frac{\partial \Pi}{\partial v}$: le produit *régressif* $\Pi \frac{\partial \Pi}{\partial v}$ conduit ainsi à la droite menée par le point $M + \frac{\xi_1}{p_1} J$ parallèlement à la direction $(p, 0, r)$ trouvée ci-dessus ; de même, l'autre caractéristique coupe la tangente à la ligne $u = \text{const.}$ au point $M - \frac{\xi}{p} I$.
