

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 275-288

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_275_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1633.

(1892, p. 29*.)

On considère la quartique, podaire du centre O d'une conique. Si d'un point quelconque M du plan on mène les tangentes à cette quartique dont les points de contact sont $T_1, T_2, \dots$ et si l'on abaisse sur cette même quartique les normales dont les pieds sont $N_1, N_2, N_3, \dots$, on a, quel que soit le point M,

$$\overline{ON_1}^2 + \overline{ON_2}^2 + \overline{ON_3}^2 + \dots = \text{const.}$$

Si la conique est une hyperbole équilatère, la quartique

devient la lemniscate de Bernoulli, et l'on a, en plus, la relation

$$ON_1 \times ON_2 \times ON_3 \times \dots = OT_1 \times OT_2 \times OT_3 \times \dots$$

(E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. A.-H. COUVERT.

Soit $ax^2 + cy^2 - 1 = 0$ l'équation de la conique rapportée à ses axes; la podaire du centre O a pour équation

$$(1) \quad f(x, y) \equiv ac(x^2 + y^2)^2 - ay^2 - cx^2 = 0.$$

Le coefficient angulaire de la normale au point (x, y) de cette courbe est

$$\frac{f'_y}{f'_x} = \frac{2ac(x^2 + y^2) - a}{2ac(x^2 + y^2) - c} \cdot \frac{y}{x}.$$

Si α, β sont les coordonnées du point M, les pieds des normales issues de ce point seront déterminées par l'équation (1) et celle obtenue en exprimant que la normale à la quartique au point x, y passe en M; cette dernière équation est

$$(2) \quad \begin{cases} (\beta - y)[2a(x^2 + y^2) - 1]cx \\ - (\alpha - x)[2c(x^2 + y^2) - 1]ay = 0. \end{cases}$$

D'autre part, N étant le pied d'une quelconque des normales considérées $\overline{ON}^2 = x^2 + y^2$, posons

$$(3) \quad x^2 + y^2 = r.$$

L'élimination de x, y entre (1), (2), (3) nous donnera une équation en r que nous allons former; pour démontrer la première partie de la question, il nous suffira de chercher la somme des racines de l'équation en r .

De (1) et (3) on tire

$$x = \sqrt{\frac{ar(1-cr)}{a-c}}, \quad y = \sqrt{\frac{cr(ar-1)}{a-c}}.$$

D'autre part, on peut écrire (2)

$$2ac(x^2 + y^2)(\beta x - \alpha y) + a\alpha y - c\beta x + (c - a)xy = 0.$$

Portons les valeurs de x et y dans cette équation; il vient

$$2acr \left(\beta \sqrt{\frac{ar(1-cr)}{a-c}} - \alpha \sqrt{\frac{cr(ar-1)}{a-c}} \right) \\ + a\alpha \sqrt{\frac{cr(ar-1)}{a-c}} - c\beta \sqrt{\frac{ar(1-cr)}{a-c}} \\ + r \sqrt{ac(1-cr)(ar-1)} = 0$$

ou

$$c\beta(2ar-1)\sqrt{ar(1-cr)} + a\alpha(1-2cr)\sqrt{cr(ar-1)} \\ = -r\sqrt{ac(1-cr)(ar-1)(a-c)}.$$

Élevons au carré, cela donne

$$ac^2\beta^2(2ar-1)^2(1-cr) + a^2c\alpha^2(1-2cr)^2(ar-1) \\ - (a-c)acr(1-cr)(ar-1) \\ = -2ac\alpha\beta(2ar-1)(1-2cr)\sqrt{ac(ar-1)(1-cr)}.$$

Élevons une seconde fois au carré, nous aurons

$$0 = [c\beta^2(2ar-1)^2(1-cr) - a\alpha^2(1-2cr)^2(ar-1)]^2 \\ + (a-c)^2r^2(1-cr)^2(ar-1)^2 - 2(a-c)r(1-cr)(ar-1) \\ \times [c\beta^2(2ar-1)^2(1-cr) + a\alpha^2(1-2cr)^2(ar-1)].$$

Les seuls termes utiles sont ceux en r^6 et r^5 ; en ne laissant dans les parenthèses que les termes qui les fournissent, il vient

$$0 = [-4a^2c^2(\alpha^2 + \beta^2)r^3 + 4ac(a+c)(\alpha^2 + \beta^2)r^2 + \dots]^2 \\ + (a-c)^2r^2(1-cr)^2(ar-1)^2 - 2(a-c)r(1-cr)(ar-1) \\ \times [4a^2c^2(\alpha^2 - \beta^2)r^3 + 4ac(a+c)(\beta^2 - \alpha^2)r^2 \dots], \\ a^2c^2[16a^2c^2(\alpha^2 + \beta^2)^2 + (a-c)^2 \\ + 8ac(a-c)(\alpha^2 - \beta^2)]r^6 \\ + [-32a^2c^2(\alpha^2 + \beta^2)^2 + 2(a-c)^2 \\ - 16ac(a-c)(\beta^2 - \alpha^2)]ac(a+c)r^5 + \dots = 0.$$

La somme des racines de cette équation est

$$-\frac{2ac(a+c) \left[\begin{array}{c} -16a^2c^2(\alpha^2 + \beta^2)^2 + (a-c)^2 \\ -8ac(a-c)(\beta^2 - \alpha^2) \end{array} \right]}{a^2c^2 \left[\begin{array}{c} 16a^2c^2(\alpha^2 + \beta^2)^2 + (a-c)^2 \\ + 8ac(a-c)(\alpha^2 - \beta^2) \end{array} \right]} = 2 \frac{a+c}{ac} = \text{const.}$$

C. Q. F. D.

La seconde partie de l'énoncé du problème fait double emploi avec la question proposée dans les *Nouvelles Annales* sous le n° 1635 (1892, p. 30*) et résolue en 1896, p. 97.

1634.

(1892, p. 92*)

On considère l'hyperbole équilatère (H) et le folium (F) dont les équations sont

$$(H) \quad x^2 - y^2 = a^2,$$

$$(F) \quad (x^2 + y^2)^3 = a^2(x^2 - y^2)^2.$$

1° Si d'un point quelconque de (H) on mène les tangentes à la courbe (F), le produit et la somme des rayons vecteurs unissant le centre de (H) aux divers points de contact des tangentes sont des quantités constantes. Si du même point on abaisse les normales sur la courbe (F), le produit et la somme des rayons vecteurs unissant le centre de (H) aux pieds des normales sont aussi des quantités constantes.

2° Si d'un point quelconque du plan on mène les tangentes et les normales à la courbe (F), le produit des rayons vecteurs des tangentes est égal à 16 fois le produit des rayons vecteurs des normales, et la somme des rayons vecteurs des tangentes est égal à 4 fois la somme des rayons vecteurs des normales. (Ces divers rayons vecteurs sont déterminés comme dans le paragraphe 1°.)

(E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. A.-H. COUVERT.

1° Soient α, β les coordonnées d'un point quelconque du plan; le coefficient angulaire de la tangente à (F) en un point (x, y) de cette courbe est

$$\frac{2a^2(x^2 - y^2) - 3(x^2 + y^2)^2}{2a^2(x^2 - y^2) + 3(x^2 + y^2)^2} \frac{x}{y}.$$

Exprimons que cette tangente passe au point (α, β) ; cela donne

$$(1) \quad \beta - y = \frac{2a^2(x^2 - y^2) - 3(x^2 + y^2)^2}{2a^2(x^2 - y^2) + 3(x^2 + y^2)^2} \frac{x}{y} (\alpha - x).$$

Posant

$$(2) \quad x^2 + y^2 = \rho^2,$$

nous aurons l'équation aux rayons vecteurs des points de contact des tangentes issues de α , β , en éliminant x et y entre (1), (2) et l'équation de (F). Pour simplifier les calculs, passons aux coordonnées polaires.

L'équation de (F) devient

$$\rho^2 = a^2 \cos^2 2\theta \quad \text{ou} \quad \rho = \pm a \cos 2\theta;$$

il suffit de prendre l'une des valeurs de ρ pour avoir toute la courbe; choisissons, par exemple,

$$(3) \quad \rho = a \cos 2\theta.$$

Je remplace x et y par leurs valeurs $\rho \cos \theta$, $\rho \sin \theta$ dans (1) mais en partie seulement; cela donne

$$\beta - y = \frac{2a - 3\rho}{2a + 3\rho} \frac{x}{y} (a - x);$$

d'où

$$\begin{aligned} & \beta y(2a + 3\rho) - ax(2a - 3\rho) \\ & + 2a(x^2 - y^2) - 3\rho(x^2 + y^2) = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\beta y(2a + 3\rho) - ax(2a - 3\rho) - \rho^3 = 0.$$

Mais

$$x = \rho \sqrt{\frac{a + \rho}{2a}}, \quad y = \rho \sqrt{\frac{a - \rho}{2a}}.$$

On a alors

$$\beta(2a + 3\rho)\sqrt{a - \rho} - a(2a - 3\rho)\sqrt{a + \rho} - \rho^2\sqrt{2a} = 0;$$

d'où, après élévation au carré,

$$\begin{aligned} & \beta^2(2a + 3\rho)^2(a - \rho) + a^2(2a - 3\rho)^2(a + \rho) - 2a\rho^4 \\ & = 2a\beta(4a^2 - 9\rho^2)\sqrt{a^2 - \rho^2}. \end{aligned}$$

Élevons encore au carré; il vient, après avoir simplifié,

$$\begin{aligned} & [\beta^2(2a + 3\rho)^2(a - \rho) - a^2(2a - 3\rho)^2(a + \rho)]^2 + 4a^2\rho^8 \\ & - 4a\rho^4[\beta^2(2a + 3\rho)^2(a - \rho) + a^2(2a - 3\rho)^2(a + \rho)] = 0. \end{aligned}$$

Telle est l'équation aux rayons vecteurs des points de contact. Elle est du huitième degré; les seuls termes qui nous intéressent sont ceux en ρ^8 , ρ^7 et le terme indépendant de ρ ; on trouve leur valeur facilement et l'équation est

$$4a^2\rho^8 - 36a(\alpha^2 - \beta^2)\rho^7 + \dots + 16a^6(\beta^2 - \alpha^2)^2 = 0.$$

D'après les relations entre les coefficients et les racines d'une équation algébrique, nous avons

$$(4) \quad \begin{cases} \Sigma \rho = -\frac{36a(\alpha^2 - \beta^2)}{4a^2} = \frac{9(\alpha^2 - \beta^2)}{a}, \\ \rho_1\rho_2\dots\rho_8 = \frac{16a^6(\beta^2 - \alpha^2)^2}{4a^2} = 4a^4(\beta^2 - \alpha^2)^2. \end{cases}$$

On voit que, pour un point de (H), $\alpha^2 - \beta^2 = a^2$; en sorte que ces deux expressions sont constantes.

Occupons-nous maintenant des normales issues de (α, β) . La condition pour qu'une normale à (F) au point (x, y) ou (ρ, θ) passe en (α, β) sera, en tenant compte des calculs précédents,

$$\beta - y = -\frac{2\alpha + 3\rho}{2\alpha - 3\rho} \frac{y}{x} (\alpha - x)$$

ou

$$\beta x(2\alpha - 3\rho) + \alpha y(2\alpha + 3\rho) - 4\alpha xy = 0.$$

Je remplace x et y par leurs valeurs en fonction de ρ , ce qui donne

$$\beta(2\alpha - 3\rho)\sqrt{a+\rho} + \alpha(2\alpha + 3\rho)\sqrt{a-\rho} = 2\rho\sqrt{2a(a^2 - \rho^2)}.$$

Élevons au carré, cela donne

$$\begin{aligned} & \beta^2(2\alpha - 3\rho)^2(a + \rho) + \alpha^2(2\alpha + 3\rho)^2(a - \rho) - 8\alpha\rho^2(a^2 - \rho^2) \\ & = -2\alpha\beta(4a^2 - 9\rho^2)\sqrt{a^2 - \rho^2}. \end{aligned}$$

Élevons une seconde fois au carré :

$$\begin{aligned} & [\beta^2(2\alpha - 3\rho)^2(a + \rho) + \alpha^2(2\alpha + 3\rho)^2(a - \rho)]^2 \\ & + 64a^2\rho^4(a^2 - \rho^2)^2 - 16a\rho^2(a^2 - \rho^2) \\ & \times [\beta^2(2\alpha - 3\rho)^2(a + \rho) + \alpha^2(2\alpha + 3\rho)^2(a - \rho)] = 0, \end{aligned}$$

équation du huitième degré dont les seuls termes utiles sont ceux en ρ^8 , ρ^7 et le terme indépendant. En mettant seulement

ces termes en évidence, il vient

$$64\alpha^2\rho^8 + 16 \times 9\alpha(\beta^2 - \alpha^2)\rho^7 + \dots + 16\alpha^6(\beta^2 - \alpha^2)^2 = 0.$$

Les relations entre les coefficients et les racines nous donnent alors

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \rho = -\frac{16 \times 9 \cdot \alpha(\beta^2 - \alpha^2)}{64\alpha^2} = \frac{9(\alpha^2 - \beta^2)}{4\alpha}, \\ \rho_1 \rho_2 \dots \rho_8 = \frac{16\alpha^6(\beta^2 - \alpha^2)^2}{64\alpha^2} = \frac{\alpha^4(\beta^2 - \alpha^2)^2}{4}. \end{array} \right.$$

Nous voyons que ces expressions sont constantes pour un point quelconque de (H).

2° Nous voyons que le produit des rayons vecteurs des tangentes est, d'après (4),

$$4\alpha^4(\beta^2 - \alpha^2)^2 = 16 \frac{\alpha^4(\beta^2 - \alpha^2)^2}{4}.$$

Ce produit est donc égal à 16 fois le produit des rayons vecteurs des normales, fourni par (5).

De même, la somme des rayons vecteurs des tangentes est égale à 4 fois la somme de ceux des normales, ainsi que le montrent immédiatement les relations (4) et (5). Il est d'ailleurs évident que ces deux propriétés sont indépendantes de la position du point (α, β) .

1835.

(1900, p. 96.)

Au bout de quel temps t , un capital C placé à intérêts simples à un taux r constitue-t-il une somme égale à celle que constituerait le même capital placé à intérêts composés au taux r' ($r' < r$) pendant le même temps?

Exprimer t en fonction de r et r' . On admet que les deux sommes sont calculées d'après les formules respectives

$$C(1 + rt), \quad C(1 + r')^t. \quad .$$

(E.-M. LÉMERAY.)

SOLUTION

Par M. C.-A. L.

L'équation à résoudre est

$$(1 + r')^t = 1 + rt.$$

Appliquons la méthode donnée dans les *Nouvelles Annales* (décembre 1897). Posons

$$1 + r' = \alpha \quad \text{et} \quad 1 + rt = \frac{1}{\alpha^r x};$$

après réduction, l'équation devient

$$xx = \left(\frac{1}{\alpha^r} \right)^{\left(\frac{1}{\alpha^r} \right)}.$$

Désignons par b le second membre, on aura

$$x = \sqrt[r]{b}$$

et

$$t = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r}} \sqrt[r]{b}} - 1 \right).$$

Cette équation a deux racines réelles correspondant aux deux valeurs de la surracine, l'une est $t = 0$ qui correspond à $x = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r}}}$

la seconde est l'époque cherchée. Pour que les deux racines soient réelles, il faut et il suffit que b soit compris entre $\left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{1}{e}}$ et 1; cela aura toujours lieu; les taux r et r' étant positifs et plus petits que 1,

$$\frac{1}{\alpha^r} = \left(\frac{1}{1 + r'} \right)^{\frac{1}{r}}$$

est toujours compris entre 1 et 0 et l'on sait que si p est compris entre 0 et 1 on a

$$1 > p^p > \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{1}{e}}.$$

En prenant $r = 4 \text{ } ^0\text{/}_0$, $r' = 3 \frac{1}{2} \text{ } ^0\text{/}_0$ on trouve

$$t = 8 \text{ ans } 203 \text{ jours.}$$

1836.

(1900, p. 96.)

A quelle distance du centre d'une hyperbole équilatère doit-on mener une perpendiculaire à son axe réel pour que l'aire comprise entre les asymptotes, la courbe et la droite cherchée, ait une valeur donnée k .

(E.-M. LÉMERAY.)

SOLUTION

Par M. C.-A. L.

Prenons les asymptotes pour axes et soient x et $\frac{1}{x}$ les abscisses des points d'intersection de l'hyperbole et de la droite cherchée. En prenant pour unité l'abscisse du sommet, l'équation à résoudre est

$$1 + 2Lx + \frac{1}{x^2} = k.$$

Posons $x^2 = \frac{1}{ey}$, $k - 1 = a$, l'équation devient

$$ey = a + y.$$

Posons encore $y + a = \frac{1}{e^a} \frac{1}{z}$; l'équation devient

$$e\left(\frac{1}{e}\right)^a \frac{1}{z} = \frac{1}{z}$$

et peut s'écrire

$$z^2 = \left(\frac{1}{e}\right)^{\left(\frac{1}{e}\right)^a},$$

d'où ⁽¹⁾

$$z = \sqrt[?]{\left(\frac{1}{e}\right)^{\left(\frac{1}{e}\right)^a}};$$

on aura ensuite y , puis x , en fonction de z et la distance demandée sera

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{1}{x} \right).$$

(¹) Voir *Nouvelles Annales*, décembre 1897.

1917.

(1901, p. 336.)

On joint un point M quelconque d'une hyperbole équilatère à ses deux sommets AA' et l'on considère le cercle circonscrit au triangle MAA' et son cercle des neuf points :

1° Le lieu des centres de similitude de ces deux cercles se compose de deux hyperboles équilatères;

2° La droite des centres est normale à une hyperbole fixe;

3° L'axe radical de ces deux cercles enveloppe une hyperbole;

4° Le lieu des centres des cercles tritangents au triangle MAA' se compose de deux hyperboles équilatères.

(E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. J. LEZ.

Soit le point M pris sur l'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 - a^2 = 0$; si son abscisse est $x = m$, son ordonnée sera $y = \sqrt{m^2 - a^2}$ et les droites AM et A'M auront pour équations

$$y = (x - a) \sqrt{\frac{m + a}{m - a}},$$

$$y = (x + a) \sqrt{\frac{m - a}{m + a}}.$$

La perpendiculaire à AM et passant par son milieu, ou

$$y - \frac{\sqrt{m^2 - a^2}}{2} = -\sqrt{\frac{m - a}{m + a}} \left(x - \frac{m + a}{2} \right)$$

rencontre l'axe conjugué en $y = \sqrt{m^2 - a^2}$; c'est le centre C du cercle circonscrit dont l'équation est

$$(1) \quad x^2 + (y - \sqrt{m^2 - a^2})^2 = m^2.$$

Les hauteurs du triangle AMA' se rencontrant en un point M' symétrique de M, le centre du cercle des neuf points, qui se

trouve au milieu de CM' , sera sur l'axe transverse en un point dont l'abscisse est $x = \frac{m}{2}$; son équation est alors

$$\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{m^2}{4}$$

ou

$$(2) \quad x^2 + y^2 - mx = 0.$$

1° Or, quand deux cercles de rayon r et r' ont pour coordonnées des centres (α, β) , (α', β') , les coordonnées de leurs centres de similitude sont

$$(3) \quad x = \frac{\alpha' r - \alpha r'}{r - r'}, \quad y = \frac{\beta' r - \beta r'}{r - r'}$$

et

$$(4) \quad x = \frac{\alpha' r + \alpha r'}{r + r'}, \quad y = \frac{\beta' r + \beta r'}{r + r'}.$$

Par suite, pour les cercles (1) et (2) on a

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, & \beta &= \sqrt{m^2 - a^2}, & r &= m, \\ \alpha' &= \frac{m}{2}, & \beta' &= 0, & r' &= \frac{m}{2}, \end{aligned}$$

et, à l'aide des formules (3) et (4), on trouve

$$(5) \quad x = m, \quad y = -\sqrt{m^2 - a^2},$$

$$(6) \quad 3x = m, \quad 3y = \sqrt{m^2 - a^2}.$$

Éliminant la variable m entre les deux premières, puis entre les deux dernières égalités ci-dessus, on obtient deux hyperboles équilatères

$$y^2 = x^2 - a^2, \quad 9y^2 = 9x^2 - a^2.$$

2° La ligne des centres CM' ayant pour équation

$$(7) \quad my - (m - 2x)\sqrt{m^2 - a^2} = 0,$$

la dérivée par rapport à m est

$$(8) \quad y\sqrt{m^2 - a^2} + 2mx + a^2 - 2m^2 = 0.$$

Éliminant la variable m entre les équations (7) et (8), on aura l'enveloppe de la ligne des centres; on trouve ainsi la courbe

$$(9) \quad \begin{cases} 64x^6 - 48x^4y^2 + 12x^2y^4 - y^6 - 48a^2x^4 - 3a^2y^4 \\ - 84a^2x^2y^2 + 12a^4x^2 - 3a^4y^2 - a^6 = 0; \end{cases}$$

c'est, comme on va le voir, la développée d'une hyperbole.

En effet, la développée d'une hyperbole

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

a pour équation

$$4b^3 + 27\Delta\Delta' = 0,$$

soit

$$(a^2x^2 - b^2y^2 - c^4)^3 - 27a^2b^2c^4x^2y^2 = 0$$

ou

$$(10) \quad \begin{cases} a^6x^6 - 3a^4b^2x^4y^2 + 3a^2b^4x^2y^4 \\ - b^6y^6 - 3a^4c^4x^4 - 3b^4c^4y^4 \\ - 21a^2b^4c^4x^2y^2 + 3a^2c^8x^2 - 3b^2c^8y^2 - c^{12} = 0. \end{cases}$$

Identifiant les équations (9) et (10), on a une suite de rapports

$$\frac{a^6}{64} = \frac{a^4b^2}{16} = \dots = \frac{(a^2 + b^2)^6}{a^6},$$

desquels on tire

$$a^2 = 4b^2, \quad a = 2b, \quad \frac{a}{2} = \frac{a^2 + b^2}{a},$$

soit

$$b = \frac{a}{5}, \quad a = \frac{2a}{5}.$$

Portant ces valeurs dans l'équation

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

on trouve

$$x^2 - 4y^2 - \frac{4a^2}{25} = 0$$

pour l'équation de l'hyperbole à laquelle la ligne des centres est normale puisque la développée de cette hyperbole se confond avec l'enveloppe de cette ligne.

3° L'équation de l'axe radical des cercles (1) et (2) ou

$$(11) \quad mx - 2y\sqrt{m^2 - a^2} - a^2 = 0,$$

contenant une variable m au deuxième degré, enveloppe une conique.

Élevant au carré, on a

$$m^2(x^2 - 4y^2) - 2a^2xm + a^2(a^2 + 4y^2) = 0,$$

et l'enveloppe est

$$(a^2 + 4y^2)(x^2 - 4y^2) = a^2x^2;$$

réduisant, on trouve l'hyperbole

$$x^2 - 4y^2 - a^2 = 0.$$

4° Enfin, les droites AM et A'M peuvent être représentées par des équations de la forme

$$(12) \quad \begin{cases} y = (x - a) \tan 2\beta, \\ y = (x + a) \tan 2\alpha; \end{cases}$$

elles se rencontrent en un point ayant pour coordonnées

$$\begin{aligned} x &= \frac{-a(\tan 2\alpha + \tan 2\beta)}{\tan 2\alpha - \tan 2\beta}, \\ y &= \frac{-2a(\tan 2\alpha \tan 2\beta)}{\tan 2\alpha - \tan 2\beta}. \end{aligned}$$

Pour que leur intersection soit sur l'hyperbole

$$x^2 - y^2 - a^2 = 0,$$

il faut que leurs coordonnées satisfassent l'équation de cette hyperbole; on trouve ainsi la relation

$$(13) \quad 1 = \tan 2\alpha \tan 2\beta.$$

Mais les bissectrices des angles que les côtés AM, A'M font avec l'axe transverse ont pour équations

$$(14) \quad \begin{cases} y = (x - a) \tan \beta, \\ y = (x + a) \tan \alpha; \end{cases}$$

elles se rencontrent aussi en un point ayant pour coordonnées

$$x = -\frac{a(\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} \beta)}{\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \beta},$$

$$y = -\frac{2a \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta}{\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \beta}.$$

De ces égalités on tire d'abord

$$(x + a) \operatorname{tang} \alpha = (x - a) \operatorname{tang} \beta,$$

$$y \operatorname{tang} \beta = (y + 2a \operatorname{tang} \beta) \operatorname{tang} \alpha,$$

puis

$$\frac{x - a}{x + a} = \frac{y}{y + 2a \operatorname{tang} \beta},$$

d'où

$$(15) \quad \operatorname{tang} \beta = \frac{y}{x - a}, \quad \operatorname{tang} \alpha = \frac{y}{x + a}.$$

Mais la relation (13) peut s'écrire

$$(1 - \operatorname{tang}^2 \alpha)(1 - \operatorname{tang}^2 \beta) = 4 \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta,$$

et, eu égard aux égalités (15), elle devient

$$\left[1 - \left(\frac{y}{x + a}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{y}{x - a}\right)^2\right] = \frac{4y^2}{(x - a)(x + a)}.$$

Développant et réduisant, on trouve

$$x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + 2a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0$$

pour l'équation du lieu décrit par les points de rencontre des bissectrices (14). Or, cette équation se décompose en deux facteurs

$$x^2 - y^2 + 2xy - a^2 = 0, \quad x^2 - y^2 - 2xy - a^2 = 0$$

qui représentent deux hyperboles équilatères dont les axes de l'une sont les asymptotes de l'autre. Tel est l'ensemble du lieu décrit par les centres des cercles tritangents au triangle AMA' circonscrit à l'hyperbole équilatère.