

T. LEMOYNE

Sur quelques applications d'un théorème de Chasles aux cubiques nodales circulaires

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4 (1904), p. 252-256

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_252_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[M'5h]

**SUR QUELQUES APPLICATIONS D'UN THÉORÈME DE CHASLES
AUX CUBIQUES NODALES CIRCULAIRES;**

PAR M. T. LEMOYNE.

I.

Je me propose de donner dans cette Note quelques propriétés qui dérivent toutes du théorème suivant de Chasles :

Si l'on mène par le point double d'une cubique des

couples de droites en involution tels que les deux tangentes à la courbe en ce point forment un des couples, les cordes interceptées dans la cubique entre ces droites passeront toutes par un même point de cette courbe.

Si les deux tangentes ne forment pas un couple faisant partie de l'involution, les cordes sous-tendues enveloppent une conique.

Par le point double O d'une cubique circulaire, menons des couples de droites également inclinées sur les bissectrices de l'angle des tangentes en ce point; les droites isotropes sont homologues dans cette involution. D'après le théorème précédent, les cordes interceptées par les couples de droites passent par un point fixe de la courbe, les droites isotropes interceptent d'ailleurs une corde qui, passant par les points cycliques, appartient à la droite de l'infini et le point de concours des cordes est le troisième point où la cubique coupe cette droite. Chaque rayon double pouvant être considéré comme deux rayons homologues infiniment voisins, l'interceptée devient alors la tangente en son point d'intersection avec la courbe. Les deux tangentes ainsi obtenues sont celles que l'on peut mener à la courbe par son troisième point d'intersection avec la droite de l'infini en dehors de la tangente en ce point qui est asymptote. Elles sont évidemment parallèles à celle-ci.

1. Lorsque, par le point double d'une cubique circulaire, on mène des couples de droites également inclinées sur les bissectrices de l'angle des tangentes en ce point, les cordes interceptées dans la courbe sont parallèles à l'asymptote.

2. Dans une cubique circulaire, les tangentes aux

deux points d'intersection de la courbe et des bissectrices de l'angle des tangentes au point double sont parallèles à l'asymptote.

De ce qu'une parallèle à l'asymptote ne rencontre la cubique qu'en deux points à distance finie, on déduit très facilement que :

3. *Toute corde parallèle à l'asymptote d'une cubique nodale circulaire est vue du point double sous un angle qui a pour bissectrices les bissectrices de l'angle des tangentes en ce point.*

Les deux tangentes à la courbe parallèles à son asymptote ont leurs points de contact sur les bissectrices de l'angle des tangentes au point double.

Traçons deux sécantes rectangulaires OP, OQ et envisageons maintenant le cas où les droites homologues sont également inclinées sur l'une de ces droites. Les tangentes au point double ne forment pas un couple appartenant à l'involution, les cordes interceptées enveloppent dès lors une conique qui, tangente à la droite de l'infini interceptée dans la courbe par le couple de droites isotropes, est une parabole. Cette parabole est d'ailleurs tangente aux tangentes à la courbe ayant pour contact les intersections P et Q des deux sécantes et de la courbe.

4. *Lorsque par le point double O d'une cubique circulaire on mène deux sécantes rectangulaires OP, OQ et que l'on trace par O des couples de droites également inclinées sur OP et OQ, les cordes interceptées enveloppent une parabole tangente aux tangentes en P et Q à la cubique.*

II.

Si, au lieu d'être formée par des couples de transversales également inclinées sur une autre, l'involution se compose de droites rectangulaires, les droites isotropes seront les rayons doubles de cette involution et, par conséquent, les cordes interceptées enveloppent (hormis le cas de la strophoïde) une conique qui est évidemment tangente aux tangentes à la courbe aux points cycliques, c'est-à-dire aux droites isotropes issues de son foyer singulier; celui-ci est donc foyer de cette conique.

5. *Si, par le point double d'une cubique circulaire, on mène des couples de droites rectangulaires, les cordes interceptées enveloppent une conique ayant pour foyer le foyer singulier de la cubique.*

On en déduit que :

6. *Les projections du foyer singulier d'une cubique nodale circulaire sur les cordes interceptées par des couples de droites rectangulaires issues du point double sont sur un cercle.*

III.

Par le point double O de la cubique, menons une droite fixe quelconque Δ et considérons le faisceau de cercles qui ont leurs centres sur cette droite et passent par O.

Un cercle passant par O ne peut couper la cubique qu'en deux autres points A, B; d'ailleurs, dans le cas actuel, lorsque l'un de ces points est déterminé, l'autre

l'est également, car il n'y a qu'un cercle passant par O, A et ayant son centre sur Δ ; la correspondance des droites OA et OB étant visiblement réciproque est par suite involutive.

En considérant le cercle dont le centre est infiniment voisin de O, on voit que les tangentes à la courbe en O forment un couple de l'involution, ce qui montre que les cordes interceptées concourent en un point de la cubique. Pour déterminer ce point, prenons maintenant comme centre un point M infiniment éloigné de O sur Δ , désignons par OC la corde perpendiculaire en O à Δ , le cercle de rayon MO se réduit à la droite de l'infini et à OC; la corde interceptée est parallèle à l'asymptote menée par C, elle coupe la courbe au point fixe D, point de concours des cordes.

Lorsque les cordes interceptées sont les diamètres des cercles, les couples de droites homologues sont rectangulaires et l'on retombe sur la définition de la strophoïde qui n'est plus dès lors qu'un cas particulier de la proposition suivante applicable à cette courbe ainsi qu'aux autres cubiques circulaires.

7. *Si, par le point double O d'une cubique circulaire, on mène une droite quelconque Δ , les cercles passant par O et ayant leurs centres sur Δ interceptent dans la cubique des cordes qui passent par un point fixe D de cette courbe.*

Le point fixe D est l'intersection de la courbe et de la parallèle à l'asymptote menée par l'extrémité C de la corde OC perpendiculaire en O à Δ .
