

T. LEMOYNE

Sur quelques propriétés des cubiques nodales

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 249-252

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__249_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[M'5h]

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CUBIQUES NODALES;

PAR M. T. LEMOYNE.

Considérons une cubique nodale et une involution de droites OP , OP' , OQ , OQ' , . . . , ayant pour sommet le point double O et pour rayons doubles les tangentes à la cubique en ce point. Ces rayons doubles forment une involution avec chaque système de deux couples tels que OP , OQ et OP' , OQ' ; OP , OQ' et OP' , OQ ; par suite, d'après un théorème bien connu de Chasles, les droites PQ , $P'Q'$ d'une part et les droites PQ' , $P'Q$ de l'autre se coupent en deux points de la courbe.

1. Si, par le point double O d'une cubique nodale, on mène deux couples de droites OP , OP' et OQ , OQ' , conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes en O , les cordes PQ , $P'Q'$ et PQ' , $P'Q$ interceptées par deux droites non conjuguées des deux couples et par les deux droites restantes se coupent en deux points M et N de la courbe.

On en déduit immédiatement, lorsque OQ se rapproche indéfiniment de OP , que :

2. Lorsque deux droites issues du point double sont conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes en ce point, les tangentes aux deux points où elles rencontrent la cubique se coupent sur cette courbe.

Par un point A de la cubique on ne peut mener que deux tangentes n'ayant pas leur contact en ce point. Si l'on trace dès lors la droite AP tangente en P , la conju-

guée harmonique OP' de OP par rapport aux tangentes en O rencontre la courbe en un point P' tel que la tangente en ce point passe par A (2). Le point P' coïncide par suite avec le point de contact de la seconde tangente menée par A .

3. Si, d'un point d'une cubique nodale, on mène les deux tangentes à la courbe autres que la tangente en ce point, les droites qui joignent les points de contact au point double sont conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes en ce dernier point.

On en déduit cette propriété des cubiques dont les tangentes au point double sont rectangulaires :

4. Lorsque, par un point d'une telle cubique, on mène les deux tangentes à la courbe autres que la tangente en ce point, l'angle sous lequel la corde de contact est vue du point double a pour bissectrices les tangentes en ce dernier point.

On en déduit comme cas particulier ce théorème connu :

Si, d'un point d'inflexion I d'une cubique nodale, on mène la tangente IM à la cubique en M , les droites qui joignent I et M au point double sont conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes en ce point.

Lorsque, dans le théorème 3, le point d'où l'on mène les deux tangentes décrit la cubique, les droites qui joignent les points de contact au point double engendrent évidemment l'involution qui a pour rayons doubles les tangentes en ce dernier point. La corde de contact enveloppe par suite une conique; d'ailleurs la corde interceptée par chacun des rayons doubles de l'involution considérés comme deux rayons homologues

infinitement voisins est évidemment ce rayon lui-même. Nous pouvons donc dire que :

5. *La corde de contact des deux tangentes menées d'un point mobile d'une cubique nodale à cette courbe enveloppe une conique tangente aux deux tangentes à la cubique en son point double.*

Si ces deux tangentes sont rectangulaires, les droites isotropes sont homologues dans l'involution et, par suite, si la cubique est circulaire, elles interceptent dans cette cubique la droite de l'infini, ce qui nous donne la propriété connue :

Si, d'un point d'une strophoïde on mène les deux tangentes à la courbe autres que la tangente en ce point, la corde de contact enveloppe une parabole dont la directrice passe par le point double.

Lorsque les droites isotropes sont tangentes au point double, les rayons homologues de l'involution sont rectangulaires et l'on a les propriétés suivantes des cubiques acnodales tangentes en leur point conjugué aux droites isotropes :

6. *Si, par le point conjugué d'une telle cubique on mène deux couples de sécantes rectangulaires coupant respectivement la cubique en A, A' et B, B', les cordes AB, A'B' et AB', A'B se coupent en deux points M et N de la courbe.*

7. *Les tangentes aux extrémités d'une corde vue du point double isolé sous un angle droit se coupent en un point P de la courbe.*

8. *Réciproquement, si d'un point P de la cubique, on mène les deux tangentes à cette courbe, la corde*

de contact AB est vue du point conjugué sous un angle droit.

9. *Cette corde enveloppe, lorsque le point P décrit la courbe, une conique ayant le point conjugué pour foyer.*

En remarquant que les côtés d'un angle qui admet des bissectrices données engendrent un faisceau involutif dont les droites isotropes forment un couple de rayons homologues, on obtiendra la propriété suivante des mêmes cubiques :

10. *Lorsque, par le point conjugué O d'une cubique acnodale tangente en ce point aux droites isotropes, on mène une sécante quelconque coupant la courbe en E, les couples de droites issues de O également inclinées sur OE interceptent dans la courbe des cordes qui concourent au point d'intersection de la cubique et de la tangente en E.*