

J. SADIER

Développement d'un certain déterminant

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 205-208

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__205_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[B1c]

DÉVELOPPEMENT D'UN CERTAIN DÉTERMINANT;

PAR M. J. SADIER.

Dans la *Théorie des nombres* de E. Lucas (p. 286)
on propose le développement d'un déterminant Δ défini
de la manière suivante :

Les éléments de la diagonale principale sont

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_n.$$

Donc

$$\begin{aligned} a_{ii} &= a_i, \\ a_{ik} &= x \quad \text{pour} \quad k > i, \\ &= y \quad \text{pour} \quad k < i. \end{aligned}$$

Une solution a été donnée (*J. S.*, 1892, p. 54) par M. Schoute, en considérant des déterminants auxiliaires. En voici une solution directe.

Pour abréger l'écriture, nous prendrons $n = 4$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & x & x & x \\ y & b & x & x \\ y & y & c & x \\ y & y & y & d \end{vmatrix}.$$

Posons

$$f(x) = (a - x)(b - x)(c - x)(d - x),$$

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= a - x, \quad b - x, \quad c - x, \quad d - x \\ (\alpha', \beta', \gamma', \delta') &= a - y, \quad b - y, \quad c - y, \quad d - y \end{aligned} \quad (z = x - y).$$

Introduisons une colonne d'éléments égaux à 1 et une ligne d'éléments égaux à 0, sauf le premier égal à 1. On a

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & x & x & x \\ 1 & y & b & x & x \\ 1 & y & y & c & x \\ 1 & y & y & y & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \bar{x} & \bar{x} & \bar{x} & \bar{x} \\ 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \bar{z} & \beta & 0 & 0 \\ 1 & \bar{z} & \bar{z} & \gamma & 0 \\ 1 & \bar{z} & \bar{z} & \bar{z} & \delta \end{vmatrix},$$

en retranchant la première colonne multipliée par x de chacune des autres. On a ensuite

$$\Delta = x\beta\gamma\delta + x \times \begin{vmatrix} 0 & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \bar{z} & \beta & 0 & 0 \\ 1 & \bar{z} & \bar{z} & \gamma & 0 \\ 1 & \bar{z} & \bar{z} & \bar{z} & \delta \end{vmatrix} = f(x) + Mx.$$

En retranchant la première colonne multipliée par y de chacune des autres, on obtient de même

$$\Delta = f(y) + M'y,$$

$$M' = \begin{vmatrix} 0 & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ 1 & \alpha' & z & z & z \\ 1 & 0 & \beta' & z & z \\ 1 & 0 & 0 & \gamma' & z \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Nous allons montrer que l'on a

$$M' = M.$$

Dans le déterminant M' , ajoutons la première ligne multipliée par z à chacune des suivantes; on a

$$M' = \begin{vmatrix} 0 & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \bar{z} & \beta & 0 & 0 \\ 1 & \bar{z} & \bar{z} & \gamma & 0 \\ 1 & \bar{z} & \bar{z} & \bar{z} & \delta \end{vmatrix} = M \quad (\alpha' - z = \alpha).$$

On a donc les deux relations

$$\Delta = f(x) + Mx,$$

$$\Delta = f(y) + My.$$

Éliminons M ,

$$(x - y)\Delta = x f(y) - y f(x),$$

$$\Delta = \frac{x f(y) - y f(x)}{x - y}.$$

Q. E. D.

Remarque I. — Dans le déterminant, le signe — a été placé au-dessus du nombre, comme pour les caractéristiques négatives des logarithmes, ce qui est moins encombrant.

Remarque II. — Dans la réponse indiquée par E. Lucas, on a dans le second membre le facteur $(-1)^n$. Cela provient de ce que E. Lucas a représenté par $f(x)$ le produit $\Pi(x - a)$.

On évite ce facteur en posant

$$f(x) = \Pi(a - x).$$
