

G. HUMBERT

Sur la résolution algébrique de l'équation du quatrième degré

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 193-196

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__193_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[A3k]

SUR LA RÉOLUTION ALGÈBRE DE L'ÉQUATION
DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. G. HUMBERT.

La relation algébrique qui lie $p \frac{u}{2}$ et pu conduit, pour la résolution de l'équation générale du quatrième degré, à une formule remarquablement symétrique. J'établirai d'abord une expression, qui me semble nouvelle, de $p \frac{u}{2}$ en fonction de $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$; c'est la suivante :

$$(1) \quad p \frac{u}{2} = \frac{e_1(e_2 - e_3)\sigma_1 u + e_2(e_3 - e_1)\sigma_2 u + e_3(e_1 - e_2)\sigma_3 u}{(e_2 - e_3)\sigma_1 u + (e_3 - e_1)\sigma_2 u + (e_1 - e_2)\sigma_3 u},$$

ou, ce qui revient au même, en posant comme d'ordinaire $\sigma_{\alpha 0} u = \frac{\sigma_{\alpha} u}{\sigma u}$,

$$2) \quad p \frac{u}{2} = \frac{e_1(e_2 - e_3)\sigma_{10} u + e_2(e_3 - e_1)\sigma_{20} u + e_3(e_1 - e_2)\sigma_{30} u}{(e_2 - e_3)\sigma_{10} u + (e_3 - e_1)\sigma_{20} u + (e_1 - e_2)\sigma_{30} u}.$$

Désignons par $\varphi(u)$ et $f(u)$ le numérateur et le dénominateur du second membre; ce sont des fonc-

tions elliptiques de u , aux périodes $4\omega_1, 4\omega_2$, et dont les seuls pôles possibles, d'ordre un au plus, sont, dans un parallélogramme des périodes, les points $0, 2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3$. Or le point $u=0$ n'est pôle ni pour $\varphi(u)$, ni pour $f(u)$; on a en effet, aux environs de ce point,

$$\sigma_{\alpha 0} u = \frac{1}{u} - \frac{1}{2} e_{\alpha} u + \left(\frac{1}{40} g_2 - \frac{1}{8} e_{\alpha}^2 \right) u^3 \\ + \left(\frac{1}{56} g_3 + \frac{1}{80} g_2 e_{\alpha} - \frac{1}{16} e_{\alpha}^3 \right) u^5 + \dots,$$

d'où l'on tire sans difficulté

$$\varphi(u) = -\frac{1}{2} u \Sigma e_{\alpha}^2 (e_{\beta} - e_{\gamma}) + u^5 (\quad) + \dots,$$

$$f(u) = -\frac{1}{8} u^3 \Sigma e_{\alpha}^2 (e_{\beta} - e_{\gamma}) + u^7 (\quad) + \dots$$

Ainsi les termes en $\frac{1}{u}$ ont disparu dans $\varphi(u)$ et $f(u)$; de plus $f(u)$ ne contient pas de termes en u et en u^3 , et $\varphi(u)$ pas de terme en u^3 .

On en conclut que $\varphi(u)$ et $f(u)$ n'ont, comme pôles, que les pôles simples $2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3$; ce sont donc des fonctions d'ordre trois, et le seul zéro de $f(u)$, dans un parallélogramme des périodes contenant l'origine, est dès lors le zéro triple $u=0$.

D'après cela, le quotient $\varphi(u):f(u)$ n'admet, dans ce parallélogramme, qu'un seul pôle, $u=0$, qui est double; et les formules précédentes donnent, autour de ce point,

$$(3) \quad \frac{\varphi(u)}{f(u)} = \frac{4}{u^2} + \lambda u^2 + \dots$$

Il n'y a pas de terme constant, parce que les termes en u^3 et u^5 manquent respectivement dans $\varphi(u)$ et $f(u)$.

(195)

Il en résulte immédiatement que la différence

$$p \frac{u}{2} - \frac{\varphi(u)}{f(u)},$$

qui est une fonction elliptique aux périodes $4\omega_1, 4\omega_2$, n'a pas de pôle dans un parallélogramme contenant l'origine; c'est donc une constante, et, en vertu de (3), une constante nulle.

C. Q. F. D.

Cela posé, si l'on donne pu , les valeurs de $p\left(\frac{u}{2}\right)$ sont les quatre quantités

$$p\left(\frac{u}{2}\right), \quad p\left(\frac{u}{2} + \omega_1\right), \quad p\left(\frac{u}{2} + \omega_2\right), \quad p\left(\frac{u}{2} + \omega_3\right).$$

Or la formule (2), si l'on y remplace u par $u + 2\omega_\alpha$, garde la même forme, à cela près que $\sigma_{\beta_0} u$ et $\sigma_{\gamma_0} u$ changent tous deux de signe; ou encore que $\sigma_{\alpha_0} u$ change seul de signe. Il en résulte, puisque $\sigma_{\alpha_0} u = \sqrt{pu - e_\alpha}$, que les quatre valeurs de $p\frac{u}{2}$, en fonction de pu , sont données par la formule

$$p \frac{u}{2} = \frac{e_1(e_2 - e_3)\sqrt{pu - e_1} + e_2(e_3 - e_1)\sqrt{pu - e_2} + e_3(e_1 - e_2)\sqrt{pu - e_3}}{(e_2 - e_3)\sqrt{pu - e_1} + (e_3 - e_1)\sqrt{pu - e_2} + (e_1 - e_2)\sqrt{pu - e_3}},$$

où les trois radicaux prennent tous les signes possibles, le signe de chacun d'eux étant d'ailleurs le même au numérateur et au dénominateur.

Si maintenant, dans l'équation classique qui lie pu et $p\frac{u}{2}$, on pose $pu = a$, $p\frac{u}{2} = x$, cette équation s'écrit

$$4(2x + a)(4x^3 - g_2x - g_3) = \left(6x^2 - \frac{1}{2}g_2\right)^2$$

ou

$$4x^4 - 16ax^3 + 2g_2x^2 + 4x(2g_3 + ag_2) + \frac{1}{4}g_2^2 + 4ag_3 = 0.$$

Posons-y, pour faire disparaître le terme en x^3 ,

$$x = \xi + a,$$

il vient

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4\xi^4 + 2\xi^2(g_2 - 12a^2) \\ + 8\xi(-4a^3 + g_2a + g_3) \\ - 12a^4 + 6a^2g_2 + 12ag_3 + \frac{1}{4}g_2^2 = 0. \end{array} \right.$$

Soit, en général, une équation du type

$$(5) \quad \xi^4 + 6A\xi^2 + 4B\xi + C = 0;$$

on la ramènera au type (4) en posant

$$\begin{aligned} g_2 - 12a^2 &= 12A, \\ g_3 + ag_2 - 4a^3 &= 2B, \\ -12a^4 + 6a^2g_2 + 12ag_3 + \frac{1}{4}g_2^2 &= 4C, \end{aligned}$$

ce qui donne, pour a , g_2 et g_3 , les valeurs

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{6B}(C - 9A^2), \\ g_2 = 12(A + a^2), \\ g_3 = 2B - 12Aa - 8a^3. \end{array} \right.$$

Ainsi, étant donnée l'équation (5), pour la résoudre algébriquement, on formera, par (6), les quantités a , g_2 , g_3 ; on calculera les racines e_1 , e_2 , e_3 de la *résolvante du troisième ordre* $4x^3 - g_2x - g_3 = 0$; et l'on aura, pour les quatre racines cherchées, la formule

$$\xi = -a + \frac{e_1(e_2 - e_3)\sqrt{a - e_1} + e_2(e_3 - e_1)\sqrt{a - e_2} + e_3(e_1 - e_2)\sqrt{a - e_3}}{(e_2 - e_3)\sqrt{a - e_1} + (e_3 - e_1)\sqrt{a - e_2} + (e_1 - e_2)\sqrt{a - e_3}},$$

où les trois radicaux prennent tous les signes possibles, le signe de chacun d'eux étant le même au numérateur et au dénominateur.
