

J. SADIER

Sur le calcul de certaines intégrales indéfinies

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 166-172

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__166_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[C2e]

SUR LE CALCUL DE CERTAINES INTÉGRALES INDÉFINIES;

PAR M. J. SADIÉ.

PROBLÈME. — *Effectuer la réduction de l'intégrale*

$$\int f(x)e^u dx,$$

dans laquelle $f(x)$ est une fonction rationnelle et u un polynôme entier en x que nous supposons de degré p .

La méthode des racines égales permet de décomposer le dénominateur de $f(x)$ en un produit de facteurs de la forme P^n ; les polynômes P étant premiers entre eux,

n'ayant pas de facteurs multiples et ayant leurs coefficients rationnels.

Par suite $f(x)$ se composera d'une partie entière et d'une série de termes de la forme $\frac{X}{P^n}$.

Je vais démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *L'intégrale $\int f(x)e^u dx$ peut, sans qu'il soit nécessaire de connaître les racines du dénominateur de $f(x)$, être mise sous la forme*

$$e^u F(x) + \int F_1(x)e^u dx + \sum \frac{\varphi(x)e^u}{P} dx.$$

F est une fonction rationnelle de x , F_1 un polynome de degré $< p - 1$.

Les polynomes φ sont de degré inférieur à ceux des polynomes P correspondants.

I.

Considérons d'abord le cas de l'intégrale correspondant à f entier, qui est une des parties du problème à résoudre.

Considérons l'intégrale

$$\int A e^u dx,$$

A polynome entier.

Première méthode (réductions successives). — Divisons A par u'

$$A = B_1 u' + C_1 \quad (\text{degré } C_1 < p - 1),$$

$$\int A e^u dx = B_1 e^u - \int B'_1 e^u dx + \int C_1 e^u dx,$$

$$\int A e^u dx = B_1 e^u + \int A_1 e^u dx,$$

$$A_1 = C_1 - B'_1.$$

Si A est de degré m , A_1 est au plus de degré $m - (p - 1)$.

En opérant sur cette seconde intégrale comme sur la première on la ramènera à une intégrale de la forme

$$\int A_2 e^u dx,$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne à une intégrale

$$\int A_q e^u dx \quad (q < p - 1).$$

Cette intégrale se réduit donc à la somme de deux termes : le premier est égal à e^u multiplié par un polynome entier en x ; le second est une intégrale de même forme que la proposée. Le polynome sous le signe $\int$ étant de degré $< p - 1$.

Seconde méthode (plus simple dans la pratique). — Sachant que le résultat est de la forme

$$\int A e^u dx = P e^u + \int R e^u dx \quad (\text{degré } R < p - 1),$$

on a, en égalant les dérivées :

$$A = P u' + P' + R.$$

Soit $P = p_1 + p_2 + \dots$ le polynome P développé suivant les puissances décroissantes de a et u_1 , le premier terme de u' ordonné de la même manière.

On peut déterminer successivement les termes $p_1, p_2, \dots$ par un procédé semblable à la division des polynomes.

En égalant les termes de degré le plus élevé dans les deux membres, a_1 étant le premier terme de A ,

$$a_1 = p_1 u_1, \quad \text{d'où} \quad p_1;$$

retranchons les deux membres $p_1 u' + p'_1$. Il reste .

$$R_1 = (p_2 + p_3 + \dots) u' + p'_2 + p'_3 + \dots + R.$$

On détermine de même p_2 et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne un reste de degré $< p - 1$ qui est le polynome R cherché.

II.

Réduction de l'intégrale

$$\int \frac{X_0 e^u dx}{P^n} = V_n,$$

X_0 est de degré moindre que celui de P. — Déterminons une fois pour toutes deux polynomes A et B tels que

$$AP - BP' \equiv 1,$$

ce qui est possible puisque P et P' sont premiers entre eux.

Multiplions la différentielle par AP — BP'

$$V_n = \int \frac{AX_0 e^u dx}{P^{n-1}} - \int \frac{BX_0 e^u P' dx}{P^n}.$$

Or

$$D\left(\frac{1}{P^{n-1}}\right) = -(n-1) \frac{P'}{P^n},$$

d'où

$$(n-1)V_n = (n-1) \int \frac{AX_0 e^u dx}{P^{n-1}} + \int BX_0 e^u d \frac{1}{P^{n-1}},$$

$$= \frac{BX_0 e^n}{P^{n-1}} + V_{n-1},$$

$$V_{n-1} = \int \frac{X_1 e^u dx}{P^{n-1}},$$

$$X_1 = (n-1)AX_0 - B'X_0 - BX_0 - BX_0 u',$$

$$= (n-1)AX_0 - D_x(BX_0) - BX_0 u'.$$

On a ainsi les deux sortes de formules de récurrence

$$(I) \quad \begin{cases} X_1 &= (n-1)AX_0 - D(BX_0) - BX_0 u' \\ X_2 &= (n-2)AX_1 - D(BX_1) - BX_1 u' \\ &\dots\dots\dots \\ X_{n-1} &= I \qquad AX_{n-2} - D(BX_{n-2}) - BX_{n-2} u' \end{cases}$$

qui déterminent les polynômes successifs X .

Puis on a

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (n-1)V_n = \frac{BX_0 e^u}{P_{n-1}} + V_{n-1} \quad n-2!, \\ (n-2)V_{n-1} = \frac{BX_1 e^u}{P_{n-2}} + V_{n-2} \quad n-3!, \\ \dots\dots\dots \\ 2V_3 = \frac{BX_{n-3} e^u}{P} + V_2 \quad 1!, \\ 1V_2 = \frac{BX_{n-2}}{P} + V_1 \quad 0!. \end{array} \right.$$

Ajoutons membre à membre ces équations après les avoir multipliées, en commençant par la dernière, par $0!$, $1!$, $2!$, ..., $n-2!$.

On a

$$n-1! V_n = B e^u \left(\frac{n-1! X_0}{P^{n-1}} + \dots + \frac{X_{n-2}}{P} \right) + V_1,$$

$$V_1 = \int \frac{X_{n-1} e^u}{P} dx.$$

X_{n-1} sera en général de degré supérieur à celui de P . On effectuera la division, ce qui donnera une partie entière (partie I du problème), ce qui montre qu'il faut d'abord traiter la deuxième partie (II).

Le théorème est ainsi démontré.

Remarque I. — On peut effectuer cette division sur chacun des polynomes X_1, X_2 , mais alors on n'a plus les formules de récurrence précédentes.

Remarque II. — Dans une réduction pratique il n'est pas nécessaire d'appliquer ces formules de récurrence, il suffit d'en appliquer le principe.

Cas particulier : $u = x$. — Dans ce cas la réduction est plus complète. L'intégrale prend la forme

$$F(x)e^x + \sum \int \frac{Xe^x}{P}.$$

Note I. — Ce dernier problème est résolu complètement dans le *Traité* de M. Hermite (t. I, Gauthier-Villars), dans le cas où l'on peut résoudre entièrement le dénominateur de $f(x)$. On peut ajouter une remarque à cette solution.

La partie qui constitue une transcendance nouvelle est de la forme

$$\sum \frac{Ae^x dx}{x-a}.$$

Tous ces termes se ramènent à une transcendance unique $\int \frac{e^x dx}{x}$, le logarithme intégral.

Faisons le changement de variable $x = a + x_1$, puis supprimons l'indice,

$$\sum \frac{Ae^x dx}{x-a} \quad \text{devient} \quad \sum Ae^a \int \frac{e^x dx}{x}.$$

Note II. — u étant un polynome entier en x , on a

$$\int ue^x dx = (u - u' + u'' - u''' + \dots)e^x.$$

On peut écrire cette formule sous forme symbolique de la manière suivante :

$$\int ue^x dx = e^x \times (1 + D)^{-1} u.$$

On développe $(1 + D)^{-1}$ suivant les puissances croissantes de D

$$1 - D + D^2 - D^3 + \dots,$$

et l'on considère les termes du développement comme des indices de dérivation appliqués à u .

On a, en général, pour une intégrale multiple d'ordre n

$$\int_{(n)} u e^x dx^n = \int dx \int dx \int dx \dots \int u e^x dx = e^x (1 + D)^{-n} u.$$

Il suffit de vérifier que si cette formule est exacte pour une valeur de n , elle l'est pour la valeur suivante $n + 1$.

D'une manière plus générale, on a

$$\int_{(n)} u e^{ax} dx^n = e^{ax} \times (1 + \alpha D)^{-n} u,$$

en supposant $\alpha = i$ ou α imaginaire quelconque, on obtient les formules relatives au cas où la différentielle renferme les fonctions circulaires sin et cos avec ou sans exponentielles.

Ces formules symboliques sont faciles à retenir et peuvent être utiles pour les applications.