Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 138-144
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__138_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1947.

(1902, p. 575.)

La condition nécessaire et suffisante pour que les points de contact des tangentes communes à deux coniques soient sur un même cercle est que leurs foyers soient sur un même cercle et y forment une division harmonique.

(E. Duporcq.)

SOLUTION

Par M. Thie.

Soient C et C′ les deux coniques données. On sait que les huit points de contact de leurs tangentes communes sont sur une même conique F, lieu des points tels que les tangentes issues de l'un d'entre eux, m, à C divisent harmoniquement l'angle formé par les tangentes issues du même point à C′.

Pour que F soit un cercle, il faut et il suffit que chacun des points cycliques I et I′ satisfasse à la condition énoncée pour le point m. Autrement dit, soient f et g les foyers réels de C, f' et g' ceux de C′ : chacun des faisceaux I $(fgf'g')$ et I′ $(fgf'g')$ devra être harmonique, deux rayons conjugués étant, dans le premier faisceau, If et If', et dans le second, I′f et I′f'.

On conclut immédiatement de là la propriété énoncée.

1948.

(1902, p. 575.)

Étant donnée une quadrique, trouver les surfaces :

1° *Telles que la droite qui joint chacun de leurs points au pôle du plan tangent s'appuie sur une droite fixe;*

2° *Telles que la même droite passe par un point fixe.*

(A. Pellet.)

SOLUTION

Par M. R. Bricard.

Résolvons d'abord la question suivante de Géométrie plane :

Étant donnée une conique C, *déterminer les courbes telles* *que la droite joignant chacun de leurs points au pôle de la tangente passe par un point fixe.*

Soit o le point donné. On peut supposer, grâce à une transformation homographique convenable, que C est un cercle et que o est le centre de C.

Dans ces conditions, soient m un point de la courbe cherchée, mt la tangente en ce point, p son pôle par rapport à C. Les trois points o, p, m étant en ligne droite, il est nécessaire que om soit perpendiculaire à mt. Autrement dit, la normale en m à la courbe cherchée passe par le point fixe o, et *cette courbe est un cercle concentrique à* C.

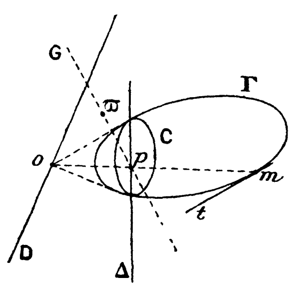
Revenant au cas général par une nouvelle transformation homographique, on voit que *les courbes cherchées sont des coniques bitangentes à* C, *et telles que la corde des contacts soit la polaire par rapport à* C *du point fixe donné.*

Cela posé, abordons les questions proposées.

1° Soient

(Q) la quadrique donnée;
D la droite donnée;
m un point de la surface cherchée (S);
(P) le plan tangent à (S) au point m.

Appelons Δ la droite conjuguée de D par rapport à (Q). Le plan $(m\Delta)$ coupe (Q) suivant une conique C et (S) suivant



une courbe Γ. Le plan (P) a pour trace sur le plan $(m\Delta)$ la tangente mt à C.

Soit ϖ le pôle du plan (P) par rapport à (Q); il se trouve sur la droite G, conjuguée de mt par rapport à la même quadrique; les droites G et D passent toutes deux par le pôle du plan ($m\Delta$) et sont par suite dans un même plan, qui contient aussi le point m puisque, par hypothèse, $m\varpi$ rencontre D.

Il en résulte que si l'on appelle p la trace de G sur le plan ($m\Delta$), c'est-à-dire le pôle de mt par rapport à C et o la trace de D sur le même plan, la droite mp passe par le point o. Si donc on se reporte au lemme démontré précédemment, on reconnaît que *la courbe* Γ *est une conique bitangente à* (Q) *aux points d'intersection de cette surface et de* Δ.

Imaginons maintenant une série continue de coniques Γ satisfaisant à cette condition. *Elles engendreront une surface jouissant de la propriété énoncée, et cette génération est aussi générale que possible.*

On peut présenter autrement cette solution : considérons deux coniques Γ, infiniment voisines. Elles appartiennent à un même cône bitangent à (Q), aux points d'intersection de cette quadrique et de Δ, et ayant son sommet sur D. Ce cône est circonscrit à (S) suivant Γ. L'une quelconque des surfaces cherchées est donc *l'enveloppe d'un tel cône, variant suivant une loi continue quelconque.*

On verra sans peine que l'on peut encore énoncer le mode suivant de génération :

L'une quelconque des surfaces (S) *est l'enveloppe d'une quadrique circonscrite à* (Q), *variant de telle manière que le plan de la conique de contact tourne autour de la droite* Δ.

2° Supposons maintenant que la droite $m\varpi$ soit assujettie à passer constamment par le point o. Par un raisonnement tout semblable au précédent, on voit que tout plan passant par le point o doit couper (Q) suivant une conique Γ bitangente, à cette quadrique, et telle que les tangentes à Γ aux deux points de contact aillent concourir au point o. On en conclut immédiatement la réponse suivante à la question posée :

Les surfaces cherchées sont les quadriques circonscrites à (Q) *suivant la conique intersection de* (Q) *et du plan polaire du point* o *par rapport à cette quadrique.*

Remarque. — Les surfaces qui répondent aux questions 1° et 2° sont respectivement les *surfaces de révolution* et les *sphères* de la *Géométrie cayleyenne.* On sait que, dans cette

Géométrie, on cherche à généraliser les propositions de la Géométrie ordinaire en remplaçant le *cercle de l'infini* ou *ombilicale* par une quadrique quelconque (Q). Dans la Géométrie cayleyenne, les sphères sont les quadriques circonscrites à (Q), deux droites sont dites *perpendiculaires* quand elles sont conjuguées par rapport à (Q), etc.

Les théorèmes de M. Pellet étendent à la Géométrie cayleyenne les théorèmes suivants de la Géométrie ordinaire :

Les surfaces dont les normales rencontrent une droite fixe sont les surfaces de révolution.

Les surfaces dont les normales passent par un point fixe sont les sphères.

On pourra consulter, pour une étude approfondie de la Géométrie cayleyenne, et en particulier pour l'extension à cette Géométrie des notions de *distance, d'angle, de lignes de courbure, de lignes géodésiques, etc.*, la *Théorie des surfaces* de M. Darboux (T. III, Livre VII, Chap. XIV).

1972.

(1903, p. 240.)

Déterminer α *et* h *de façon que les intégrales*

$$u = \int \frac{(\alpha x + h)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-4)(x-9)}},$$

$$v = \int \frac{(\alpha x - 5h)\,dx}{\sqrt{x^4 + 2x^2 - 4x + 1}}$$

soient pseudo-elliptiques et les calculer. (DOLBNIA.)

SOLUTION

Par M. DOLBNIA [1].

1° Admettons *a priori* que l'intégrale u satisfait à une rela-

[1] Le problème, pour être complètement traité, exige des calculs assez compliqués, comme d'ailleurs toutes les questions relatives aux intégrales pseudo-elliptiques. Nous nous contenterons, pour cette raison, de résumer la solution de M. Dolbnia. Les résultats indiqués peuvent être vérifiés par différentiation.

La même remarque s'applique à la question 1973 (*voir* ci-après).

tion de la forme

$$(1) \qquad x^3 + ax^2 + bx + c = \lambda \sin(ui) \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

a, b, c, λ étant des coefficients constants que l'on cherchera à déterminer par identification. A cet effet, on différentiera la relation (1) en remplaçant $\frac{du}{dx}$ par

$$\frac{(\alpha x + h)}{\sqrt{x(x-1)(x-4)(x-9)}}.$$

On trouve

$$a = -14, \qquad b = 49, \qquad c = \lambda = -18,$$
$$\alpha = 3, \qquad h = -7,$$

et l'on a finalement

$$u = \int \frac{\left(x - \frac{7}{3}\right) dx}{\sqrt{x(x-1)(x-4)(x-9)}}$$
$$= \log\left[x^3 - 14x^2 + 49x - 18 + (x-7)\sqrt{x(x-1)(x-4)(x-9)}\right].$$

2° La même méthode appliquée à l'intégrale v conduit au résultat suivant :

$$\alpha = 5, \qquad 5h = 1,$$

$$v = \int \frac{(5x-1)\, dx}{\sqrt{x^4 + 2x^2 - 4x + 1}}$$
$$= \log\left[x^5 + x^4 + 3x^3 - x^2 - 2 + (x^3 + x^2 + 2x)\sqrt{x^4 + 2x^2 - 4x + 1}\right].$$

Autre réponse de M. NICOLAS KRYLOFF.

1973.

(1903, p. 240)

Trouver dans quels cas les intégrales abéliennes

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^2 + 2ax + b)(x^2 + 2rx + s)^2}},$$

$$v = \int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^4 (x-b)^2 (x^2 + cx + e)^3}},$$

$$w = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)(x-b)^3 (x-c)^2 x^2}}$$

peuvent être ramenées à des intégrales elliptiques et faire ces réductions. (DOLBNIA.)

SOLUTION

Par M. DOLBNIA.

1° La réduction est possible quand on a

$$b + s = 2ar.$$

Dans ce cas, l'intégrale u prend la forme elliptique

$$u = \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - \frac{2^8}{3^6}(r^2 - s)^2(a^2 - b)}},$$

au moyen de la substitution définie par la relation

$$\frac{(r-a)x^2 + (s-b)x + as - br}{x^2 + 2rx + s} = \frac{3^2}{2^4}\frac{1}{r^2 - s}\sqrt{4z^3 - \frac{2^8}{3^6}(r^2 - s)^2(a^2 - b)}.$$

2° La réduction est possible si l'on a

$$e = -\frac{1}{2}(ac + bc + 2ab),$$

et l'intégrale v prend la forme

$$v = \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - \frac{1}{2.3^6}(c + 2b)(c + 2a)^2(a - b)^3}},$$

par la substitution définie par

$$\left(\frac{x - b}{x - a}\right)^2 = \frac{2^3.3^6}{(a - b)^3(c + 2a)^3} z^3.$$

3° La réduction est possible si l'on a

$$ab + 3bc - 4ac = 0$$

et l'on obtient

$$u' = \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - \frac{2^{12}.c^3(a+3c)(a+2c)^2}{3^4.a^6(a-c)^2}z}},$$

au moyen de la substitution définie par

$$\frac{(x-e)(x-c)^2}{(x-a)^3} = \frac{3^4.a^4(a-c)^2(a+2c)^2}{2^8(a+3c)^2}z^2.$$