

GEORGES REMOUNDOS

Sur une propriété des transcendentes de plusieurs variables indépendantes

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4 (1904), p. 111-113

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__111_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[D4a]

**SUR UNE PROPRIÉTÉ DES TRANSCENDANTES
DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES;**

PAR M. GEORGES REMOUNDOS.

1. On sait le théorème classique de l'Algèbre sur les fonctions rationnelles des ν racines d'une équation algébrique

$$(1) \quad x^\nu + a_1 x^{\nu-1} + a_2 x^{\nu-2} + \dots + a_{\nu-1} x + a_\nu = 0,$$

d'après lequel *une telle fonction symétrique des ν racines $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ peut s'exprimer rationnellement à l'aide des coefficients $a_1, a_2, \dots, a_{\nu-1}, a_\nu$, et inversement.*

Aussi, le théorème de Galois, qui est fondamental dans sa célèbre théorie, et pour la démonstration duquel on fait usage du précédent (*voir*, par exemple, le *Traité d'Analyse* de M. PICARD, t. III, p. 439).

Je me propose ici de démontrer un théorème ana-

logue de l'analyse concernant les fonctions transcendentes et uniformes de plusieurs variables indépendantes, qui peut servir dans diverses circonstances.

Ce théorème est le suivant :

Toute fonction entière (uniforme et continue) et symétrique des ν racines $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ de l'équation (1) s'exprime uniformément à l'aide des ν fonctions symétriques élémentaires $a_1, a_2, \dots, a_\nu$, et inversement.

En effet, une telle fonction étant développable en série, procédant suivant les puissances entières et positives de $x_1, x_2, \dots, x_\nu$, on aura

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma(x_1, x_2, \dots, x_\nu) \\ = Q_0(x_1, \dots, x_\nu) + Q_1(x_1, \dots, x_\nu) + \dots \\ \quad \quad \quad + Q_n(x_1, x_2, \dots, x_\nu) + \dots, \end{array} \right.$$

où $Q_n(x_1, x_2, \dots, x_\nu)$ désigne un polynôme homogène et de degré n en $x_1, x_2, \dots, x_\nu$.

Si $\sigma(x_1, x_2, \dots, x_\nu)$ est symétrique par rapport à ces variables, il en sera de même de toutes les fonctions $Q_0, Q_1, \dots, Q_n(x_1, x_2, \dots, x_\nu)$; or, ces fonctions sont rationnelles et, d'après le théorème précédemment cité, elles peuvent s'exprimer rationnellement en fonction de $a_1, a_2, \dots, a_\nu$.

Ainsi, la fonction $\sigma(x_1, x_2, \dots, x_\nu)$ sera mise sous la forme d'une série procédant suivant les puissances entières et positives de $a_1, a_2, \dots, a_\nu$; elle sera donc une fonction entière par rapport à ces quantités.

La réciproque est évidente.

La démonstration s'étend visiblement au cas où

$$\sigma(x_1, x_2, \dots, x_\nu)$$

est le quotient de deux transcendentes entières. Je pense

que le théorème est vrai pour toute fonction uniforme

$$\sigma(x_1, x_2, \dots, x_\nu).$$

et il serait démontré aisément, si la théorie des fonctions de plusieurs variables était suffisamment développée.

2. D'une façon plus générale, le théorème peut s'énoncer :

Si $\sigma(x_1, x_2, \dots, x_\nu)$ est une fonction symétrique et holomorphe dans le voisinage d'un système de valeurs $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_\nu = \alpha_\nu$, elle sera une fonction $\Sigma(a_1, a_2, \dots, a_\nu)$ aussi holomorphe dans le voisinage des valeurs correspondantes de $a_1, a_2, \dots, a_\nu$ et inversement.

En s'appuyant sur ce théorème, on établira le théorème suivant qui est une extension aux fonctions transcendantes de celui de Galois et se démontre de la même façon :

Toute transcendante de $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ holomorphe dans le voisinage d'un système de valeurs $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_\nu = \alpha_\nu$ et invariable pour les substitutions du groupe de Galois attaché à l'équation (1) est holomorphe aussi de $a_1, a_2, \dots, a_\nu$ dans le voisinage des valeurs correspondantes.

D'une façon plus précise, elle est holomorphe dans le voisinage de valeurs correspondantes de $R_1, R_2, \dots, R_\mu$, si ces lettres désignent les variables indépendantes dont $a_1, a_2, \dots, a_\nu$ dépendent. Nous supposons, bien entendu, que $\mu < \nu$ pour que l'affect (d'après une expression de Kronecker) ne soit pas nul.

La réciproque est évidente.