

R. BRICARD

Sur un problème relatif aux surfaces

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 3
(1903), p. 99-104

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__99_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[05i]

SUR UN PROBLÈME RELATIF AUX SURFACES;

PAR M. R. BRICARD.

1. Soient (S) et (S') deux surfaces inverses par rapport à un point O . On sait que deux points m et m' , appartenant respectivement à (S) et (S') et se correspondant dans l'inversion, satisfont aux conditions suivantes, que j'appellerai conditions $[C]$:

1° La droite mm' passe par le point O .

2° La normale à (S) en m et la normale à (S') en m' se rencontrent.

3° Si m décrit une ligne de courbure de (S) , m' décrit une ligne de courbure de (S') .

On peut se demander si ces propriétés caractérisent deux surfaces inverses. Nous verrons qu'il n'en est pas ainsi, en cherchant à résoudre la question suivante :

Déterminer de la manière la plus générale un couple de surfaces (S) et (S') entre lesquelles on puisse établir une correspondance telle que deux points correspondants quelconques m et m' satisfassent aux conditions $[C]$ énoncées plus haut, O étant un point convenablement choisi.

J'indique dès maintenant les résultats auxquels mène l'étude de ce problème.

On obtient des couples de surfaces satisfaisant aux conditions $[C]$ dans les cinq cas suivants, et seulement dans ces cas :

I. (S) et (S') sont confondues en un même cône de sommet O .

NOTE ÉCON.

II. L'une des surfaces (S) et (S') est une sphère de centre O , l'autre surface est quelconque.

III. (S) et (S') sont deux surfaces homothétiques par rapport au point O .

IV. (S) et (S') sont deux surfaces inverses par rapport au point O .

V. (S) et (S') sont engendrées simultanément de la manière suivante : on se donne un cône (G) quelconque de sommet O ; dans l'un des plans tangents de (G) on trace deux courbes arbitraires K et K' . Lorsque ce plan tangent roule sur (G) , K engendre (S) et K' engendre (S') .

Tous ces systèmes satisfont bien aux conditions $[C]$. Le fait est évident pour les systèmes I, II, III. Pour le système IV, il résulte des propriétés de l'inversion rappelées au début. Enfin, pour reconnaître qu'il en est de même pour le système V, remarquons que les surfaces (S) et (S') définies de la manière indiquée sont des *surfaces-moulures* particulières. D'après les propriétés connues de ces surfaces, les lignes de courbure de (S) sont, dans un système, les diverses positions de la courbe K , et, dans l'autre système, les lignes sphériques trajectoires des divers points de K dans le mouvement de cette courbe. De cette remarque qui s'applique à (S') , *mutatis mutandis*, résulte immédiatement que les conditions $[C]$ sont bien satisfaites par les surfaces du système V ⁽¹⁾.

Voici maintenant par quelle analyse on peut établir que le problème proposé n'admet pas de solutions, en dehors des précédentes.

(¹) On peut remarquer que le cas I est un cas particulier du cas V.

2. Supposons réalisé un couple de surfaces (S) et (S') satisfaisant aux conditions [C]. Soient (P) le plan tangent à (S) en m , (P') le plan tangent à (S') en m' . Il y a lieu de distinguer trois cas.

1° *Les plans (P) et (P') sont constamment confondus.*

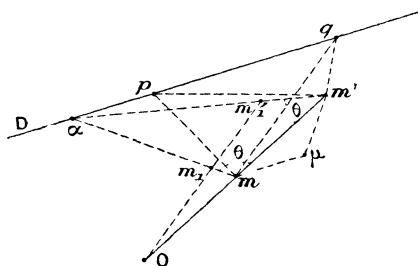
Cela exige que (P) passe par le point m' et par suite par le point O . (S) est donc un cône de sommet O et (S') est visiblement confondue avec (S) . Nous sommes ainsi conduits à la solution I.

2° *Les plans (P) et (P') sont constamment parallèles.*

Les surfaces (S) et (S') sont homothétiques par rapport au point O . (Solution II.)

3° *Les plans (P) et (P') sont distincts et se coupent suivant une droite D située à distance finie.*

Cette droite D ne peut passer ni par le point m ni par le point m' . Supposons, en effet, qu'elle passe par le



premier de ces points. Alors le plan (P') passera par le point O , d'où nous conclurons comme tout à l'heure que (S') est un cône, avec lequel (S) est nécessairement confondue. Les plans (P) et (P') coïncideront, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse actuelle.

Cela posé, menons dans le plan (P) les directions principales relatives à la surface (S) et au point m . Opérons de même dans le plan (P'), relativement à la surface (S') et au point m' . On obtient ainsi quatre droites qui, d'après la troisième des conditions [C], se coupent deux à deux en deux points p et q , situés nécessairement sur D.

[Si pour l'une des surfaces, (S) par exemple, les directions principales sont indéterminées en chaque point, tous les points de (S) sont des ombilics, et cette surface est, comme on sait, une sphère. On obtient ainsi la solution II. Je supposerai dorénavant ce cas écarté.]

3. Il faut maintenant encore traiter séparément deux cas qui peuvent se présenter :

1° *Les deux points p et q sont (en général) à distance finie.*

Décrivons la sphère (Σ) ayant pour diamètre pq ; elle passe par les points m et m' , puisque les angles $\widehat{pmq}$ et $\widehat{pm'q}$ sont droits. Menons la normale en m à (S) et la normale en m' à (S'). Elles se coupent en un point μ (deuxième des conditions [C]). μm et $\mu m'$ sont deux tangentes à (Σ). On en conclut que les deux points m et m' sont symétriques par rapport au plan (μpq).

Imaginons maintenant que le point m se déplace infinitésimale peu sur (S) dans une direction *quelconque* et vienne en m_1 . Le point m' viendra en m'_1 , sur la surface (S'). Les droites mm_1 , $m'm'_1$ se coupent sur D; soit α leur point de rencontre. Les angles $\widehat{\alpha mm'}$, $\widehat{\alpha m'm}$ sont égaux; désignons par θ leur valeur commune.

Le triangle $\alpha mm'$, coupé par la transversale $Om_1 m'_1$, donne la relation

$$\frac{m_1 m}{m_1 \alpha} \frac{m'_1 \alpha}{m'_1 m'} \frac{O m'}{O m} = 1,$$

d'où

$$\frac{m_1 m}{m'_1 m'} = \frac{O m}{O m'} \frac{m_1 \alpha}{m'_1 \alpha} = \frac{O m}{O m'},$$

en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur. Mais on a

$$m_1 m = \frac{d(O m)}{\cos \theta}, \quad m'_1 m' = - \frac{d(O m')}{\cos \theta},$$

d'où l'on tire

$$\frac{d(O m)}{d(O m')} = - \frac{O m}{O m'}$$

ou

$$O m' d(O m) + O m d(O m') = 0,$$

et, en intégrant,

$$O m \cdot O m' = \text{const.}$$

Ainsi, dans l'hypothèse actuelle, (S) et (S') sont des surfaces inverses par rapport au point O. C'est la solution IV.

2° *L'un des points p et q, le point q par exemple, est constamment rejeté à l'infini sur D.*

S'il en est ainsi, les droites mq , $m'q$ et D sont parallèles, et le point p est la projection commune des points m et m' sur D. En désignant toujours par μ le point de rencontre des normales aux deux surfaces, respectivement en m et en m' , les quatre points m , m' , p , μ sont dans un même plan perpendiculaire à D.

Soit Γ_p la ligne de courbure de (S) qui passe en m et qui est tangente à mp . Cette courbe est la directrice d'une normalie développable, dont le plan tangent le

long de $m\mu$ est le plan $(pm\mu)$. Mais ce plan contient le point m' et par suite le point O . Il est donc nécessaire que la normalie développable en question se réduise à un plan contenant le point O et la courbe Γ_p est tracée dans ce plan. *Ainsi la ligne de courbure Γ_p et, naturellement, toutes celles du même système sont tracées dans des plans qui contiennent le point O .*

Ces divers plans enveloppent un cône (G) de sommet O . Considérons maintenant sur (S) la seconde ligne de courbure Γ_q qui passe au point m . $m\mu$ et mO sont deux normales à cette courbe. Son plan normal en m est par suite le plan $(Om\mu)$, tangent au cône (G) . *On voit donc que (G) est la surface polaire de Γ_q , et naturellement de toutes les lignes de courbure du même système.*

Or on sait qu'une courbe gauche peut être considérée comme la trajectoire d'un point, convenablement choisi, appartenant à un plan qui roule sur la surface polaire de cette courbe. Les courbes Γ_q sont donc les trajectoires des divers points de l'une des courbes Γ_p , quand on fait rouler sur le cône (G) le plan qui contient cette courbe ⁽¹⁾.

Tous ces raisonnements peuvent se répéter pour la surface (S') , et nous sommes ainsi amenés à la solution V , par laquelle le problème est définitivement épuisé.

(¹) On remarquera que le résultat obtenu peut s'énoncer ainsi, sous une autre forme : *Si les lignes de courbure d'une surface appartiennent, dans un système, à des sphères concentriques, cette surface est engendrée par une courbe plane de grandeur invariable, dont le plan roule sur un cône d'ailleurs quelconque.*