

STUYVAERT

Sur la sphère osculatrice à la cubique gauche

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 3
(1903), p. 64-68

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__64_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[M³5a]

SUR LA SPHÈRE OSCULATRICE A LA CUBIQUE GAUCHE;

PAR M. STUYVAERT,
Professeur à l'Athénée royal de Gand.

J'ai donné ⁽¹⁾ une construction de la sphère osculatrice à la cubique gauche. Je me permets de revenir sur ce sujet, parce que j'ai exposé la solution sous une forme trop concise; d'ailleurs, M. Servais m'a fait remarquer que le cas de la cubique circulaire doit être examiné à part; enfin, le théorème formant le point de départ de cette recherche peut se démontrer par une méthode plus simple que celle que j'ai employée; cette méthode plus simple est due à feu M. Fr. Deruyts.

⁽¹⁾ *Note sur les cubiques gauches (Bull. de l'Acad. royale de Belgique, 1900).*

THÉORÈME DE REYE. — *Toutes les quadriques passant par six points A, B, C, D, E, F sont coupées en des couples de points en involution, par toute bisécante d de la cubique gauche c_3 déterminée par les six points donnés ⁽¹⁾.*

Pour qu'il ne soit pas nécessaire de considérer à part le cas des imaginaires, il est désirable d'avoir une démonstration analytique. Voici celle de M. Deruyts.

L'équation du système de quadriques a la forme

$$\Sigma \equiv \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 + \lambda_4 S_4 = 0.$$

Trois des surfaces S ne peuvent faire partie d'un même faisceau ; elles ne peuvent pas appartenir, toutes les quatre, à un même réseau. Mais on peut supposer que S_3 et S_4 passent par c_3 et sa bisécante d .

Les coordonnées de tout point de d annulent S_3 et S_4 . Donc, ceux de ces points qui appartiennent à Σ , appartiennent à $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2$ et inversement. Or, le faisceau $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2$ marque, sur d , une involution ; par conséquent, il en est de même du système Σ .

Corollaire I. — Les points d'appui de d sur c_3 forment un couple de l'involution.

Corollaire II. — Si d est une tangente, le contact est un point double de l'involution ; l'autre point double est sur le plan polaire du contact par rapport à toutes les quadriques Σ et, en particulier, par rapport aux couples de faces opposées de l'hexaèdre ABCDEF.

THÉORÈME. — *Toutes les sphères passant par trois points A, B, C de c_3 coupent encore la courbe en des*

⁽¹⁾ REYE, *Annali di matematica*, 2^e série, t. II, p. 130.

Ann. de Mathémat., 4^e série, t. III. (Février 1903.)

triples de points D, E, F, situés dans des plans parallèles ⁽¹⁾.

Soient

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1,$$

les équations de c_3 .

L'équation d'une sphère passant par trois points contient une constante arbitraire λ , au premier degré. Si l'on y remplace x_1, x_2, x_3, x_4 par $\omega^3, \omega^2, \omega, 1$, on a une relation du sixième degré en ω , satisfaite, quel que soit λ , par les paramètres $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ de A, B, C.

En divisant le premier membre de l'équation par $(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)(\omega - \omega_3)$, on a une relation cubique en ω , avec la constante λ au premier degré. Les racines de cette équation sont les paramètres des points D, E, F et l'équation du plan DEF s'obtient en remplaçant $\omega^3, \omega^2, \omega, 1$ par x_1, x_2, x_3, x_4 . Comme cette équation contient toujours λ au premier degré, le plan décrit un faisceau.

En d'autres termes, si l'on prend un point D quelconque sur la cubique, les quatre points A, B, C, D sont sur une sphère qui coupe la courbe en deux nouveaux points E, F, de sorte que chaque terne D, E, F est déterminé, de la même manière, par un quelconque de ses points.

Donc, ces ternes décrivent une involution cubique du premier rang et les plans D, E, F passent par un même axe.

Comme une des sphères du système considéré se compose du plan ABC et du plan de l'infini, l'axe du faisceau des plans DEF est à l'infini.

(¹) Théorème connu et facile à démontrer par la Géométrie.

PROBLÈME. — *Connaissant les trois points A, B, C de c_3 construire la direction du plan DEF.*

Soient : S une sphère quelconque par A, B, C, coupant encore c_3 en trois points inconnus D, E, F ; M un point de c_3 et t la tangente en ce point.

La droite t rencontre, en P le plan ABC, en Q le plan polaire de M relatif à S, et en X le plan inconnu DEF. Or, d'après le théorème de Reye, X est le conjugué harmonique de P sur MQ, et peut être construit.

Deux autres points M' et M'' de la cubique donneront de même deux points X' et X'' analogues à X ; le plan XX'X'' est le plan inconnu DEF.

PROBLÈME. — *Construire la sphère osculatrice en un point A de c_3 .*

1° On suppose, dans le problème précédent, les points A, B, C coïncidents, c'est-à-dire que l'on commence par construire une sphère ayant, en A, un contact triponctuel avec la cubique. Pour cette opération, on projette c_3 , d'un de ces points, sur le plan osculateur en A, puis on décrit le cercle osculateur c_2 , en A, à la conique obtenue ; enfin, on mène par ce cercle une sphère quelconque S.

2° On détermine, comme dans le problème précédent, le plan DEF des trois autres intersections de S avec c_3 .

3° Finalement, on mène, par A, un plan parallèle à DEF. Ce plan coupe c_3 en deux points qui appartiennent à la sphère osculatrice cherchée et achèvent de la déterminer.

Cas de la cubique circulaire. — 1° Ce qui précède permet, d'abord, de construire le plan qui contient les points circulaires à l'infini E, F de la cubique. Menons,

comme ci-dessus, une sphère S ayant un contact tri-ponctuel, en A , avec la cubique et passant par un point donné D de la courbe. Une tangente t au point M de la cubique perce en P le plan osculateur au point A , et en Q le plan polaire de M relatif à S ; soit X le conjugué harmonique de P sur MQ . Un autre point M' de la courbe donne, de même, un point X' analogue à X ; le plan DXX' est le plan cherché DEF . Ce plan reste parallèle à lui-même si l'on fait varier D .

2° Cela étant, faisons coïncider D avec A ; soit AEF un plan parallèle à la direction DEF trouvée à l'instant.

La tangente t au point M de la courbe perce, en P_1 , le plan AEF , en P le plan osculateur au point A ; soit Q_1 le conjugué harmonique de M relatif à P et P_1 ; M et Q_1 sont conjugués par rapport à la sphère osculatrice, ce qui suffit pour la déterminer.