

LÉON AUTONNE

Sur la canonisation des formes bilinéaires

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 3
(1903), p. 57-64

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__57_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[B11 a]

SUR LA CANONISATION DES FORMES BILINÉAIRES;

PAR M. LÉON AUTONNE.

1. Considérons une *matrice* A ou Tableau des n^2 coefficients

$$A = [a_{jk}] = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n)$$

de déterminant

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

La matrice définit sans ambiguïté, soit une *forme bilinéaire*

$$A = A(x, y) = \sum_{jk} a_{jk} y_j x_k,$$

soit une *substitution* n -aire

$$A = \left| x_j \sum_k a_{jk} x_k \right|.$$

2. La même lettre A peut désigner indifféremment la matrice, la forme bilinéaire ou la substitution. Je suivrai les règles du calcul symbolique telles qu'elles sont exposées par Frobenius (*J. f. r. u. a. M.*, t. LXXXIV, p. 1). Les formules symboliques porteront une triple interprétation, suivant qu'elles s'entendront de matrices, de formes bilinéaires ou de substitutions.

3. Une matrice A_0 sera *canonique* si

$$A_0(x, y) = \sum_j h_j x_j y_j = \sum hxy.$$

Si $h_j = 1$, la matrice devient la matrice unité E ,

$$E(x, y) = \sum xy.$$

Soient A et B deux matrices, avec $|B| \neq 0$. Si l'on a B telle que

$$A = B^{-1} A_0 B, \quad A_0 = \text{canonique},$$

A est *canonisable* et admet A_0 pour *forme canonique* et B pour *canonisante*.

A est toujours canonisable si l'équation caractéristique

$$(\mathfrak{D}) \quad \Delta(r) = \Delta_0(r) = |rE - A| = 0$$

n'a que des racines simples. A cesse en général d'être canonisable, s'il apparaît dans $\mathfrak{D}$ des racines multiples.

4. M. Jordan a signalé, il y a longtemps déjà, que toute substitution d'ordre fini était canonisable. Il en est de même pour les substitutions *unitaires* et les substitutions *hermitiennes* que j'ai étudiées [*Sur l'Hermitien* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1902); *Sur les groupes linéaires réels et orthogonaux* (*Bulletin de la Société Mathématique*, 1902)] et les substitutions *réelles* et *orthogonales*, cas particulier des unitaires, ainsi du reste que pour toutes les *orthogonales*.

Par contre, je n'ai vu publiées nulle part les conditions générales, nécessaires et suffisantes de canonisabilité.

Elles se déduisent facilement, ainsi qu'on le verra

ci-dessous, d'un fameux théorème de Weierstrass (*Monatsberichte de l'Académie de Berlin*, 1868, p. 310 à 338).

§. Rappelons d'abord les principes de la théorie.

Prenons un *faisceau* de matrices $f_r = rA + B$, r étant un paramètre variable, et nommons $\Delta(r) = \Delta_0(r)$ le déterminant

$$|rA + B|,$$

premier membre de l'équation caractéristique $\mathfrak{D}$, $\Delta(r) = 0$.

Dans le déterminant Δ , les $k^{\text{ièmes}}$ mineurs seront des polynômes en r , de degré $n - k$. Nommons $\Delta_k(r)$ le plus grand commun diviseur de tous ces mineurs.

Supposons qu'une racine ρ de $\mathfrak{D}$ possède un degré de multiplicité α_k dans l'équation $\Delta_k(r) = 0$, avec $k = 0, 1, \dots, q$, tandis que : $1^\circ \alpha_0 = m$ est le degré de multiplicité dans $\mathfrak{D}$; $2^\circ \alpha_q = 0$.

Les degrés de multiplicité α_k forment une suite décroissante

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \dots > \alpha_k > \dots > \alpha_{q-1} > 0.$$

Les différences $\beta_k = \alpha_{k-1} - \alpha_k$ forment une suite non croissante

$$\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_k \geq \dots \geq \beta_q.$$

Si l'on pose $\beta_k = 1 + \delta_k$, les entiers positifs ou nuls δ_k forment une suite non croissante

$$\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_k \geq \dots \geq \delta_q.$$

D'ailleurs

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=q} \beta_k &= (\alpha_0 - \alpha_1) + (\alpha_1 - \alpha_2) + \dots \\ &+ (\alpha_{k-1} - \alpha_k) + \dots + \alpha_{q-1} = \alpha_0 = m = q + \sum_{k=1}^{k=q} \delta_k, \end{aligned}$$

d'où la formule

$$(1) \quad m - q = \sum_{k=1}^{k=q} \delta_k.$$

Si tous les δ sont nuls, q est précisément le degré m de multiplicité que la racine ρ possède dans $\mathbb{Q}$.

6. Weierstrass dit que les expressions

$$(r - \rho)^{\beta_k}$$

sont les *Elementartheiler* afférents à la racine ρ .

Pour abréger, je dirai que ces expressions sont les *successifs* (sous-entendu : facteurs ou diviseurs) afférents à la racine ρ .

Le successif est *simple*, si l'exposant β_k est égal à l'unité, d'où $\delta_k = 0$.

7. Deux faisceaux de matrices

$$rA + B \quad \text{et} \quad rC + D$$

sont *équivalents* s'il existe deux matrices L et M , avec

$$|L| \neq 0, \quad |M| \neq 0,$$

telles que

$$rC + D = L(rA + B)M,$$

c'est-à-dire

$$C = LAM, \quad D = LBM.$$

Alors C est *équivalente* à A et D à B .

Dans le cas particulier où $C = A = E$, on a

$$L = M^{-1},$$

et l'équivalence se change en similitude.

Ainsi pour que deux matrices A et A_0 soient sem-

blables, il faut et il suffit que les deux faisceaux

$$rE - A \quad \text{et} \quad rE - A_0$$

soient équivalents.

8. L'admirable théorème de Weierstrass s'énonce ainsi :

Pour que deux faisceaux

$$rA + B \quad \text{et} \quad rC + D$$

soient équivalents, il faut et il suffit que les successifs soient identiques de part et d'autre.

9. Je vais en déduire la solution du problème proposé.

THÉORÈME. — *Pour qu'une matrice A soit canonisable, il faut et il suffit que le faisceau caractéristique*

$$\varphi_r = rE - A$$

n'admette que des successifs simples.

La démonstration est très courte, après quelques explications préliminaires.

10. Conservons les notations du n° 5 et envisageons le système Ω des n équations linéaires et homogènes

$$(\Omega) \quad \rho x_j = \sum_k a_{jk} x_k \quad (j, k = 1, 2, \dots, n).$$

On a $\Delta_k(\rho) = 0$ pour $\rho = 0, 1, \dots, q-1$, tandis que $\Delta_q(\rho) \neq 0$; Ω ne contient que $n - q$ équations distinctes.

Réciproquement, si le système Ω , aux n inconnues x_j , ne contient que $n - q$ équations distinctes, on a $\Delta_k(\rho) = 0$ pour $k < q$ et $\Delta_q(\rho) \neq 0$.

Ces propriétés deviennent évidentes si l'on remarque que le déterminant des inconnues x_j dans Ω est précisément $\Delta_0(\rho)$.

En particulier, si les successifs relatifs à ρ sont simples, les δ_k sont nuls, $q = m$ [formule (1) du n° 5] et Ω contient $n - m$ équations distinctes. Réciproquement si Ω contient $n - m$ équations distinctes, les successifs sont tous simples, car les entiers δ ne peuvent être négatifs.

11. LEMME. — *Une matrice canonique Λ_0 a tous ses successifs simples.*

Soit

$$\Lambda_0(x, y) = \rho(x_1 y_1 + \dots + x_m y_m) + \rho'(x_{m+1} y_{m+1} + \dots) + \dots$$

$$(\rho' \neq \rho, \dots).$$

La racine ρ de ω possède le degré m de multiplicité. Le système Ω contient les $n - m$ équations distinctes $x_{m+s} = 0$, $s = 1, 2, \dots, n - m$. Par suite (n° 10) tous les successifs sont simples dans la matrice Λ_0 , ou, plus exactement, dans le faisceau caractéristique $rE - \Lambda_0$ de Λ_0 .

C. Q. F. D.

12. La démonstration du théorème s'achève maintenant en quelques mots.

Pour qu'une matrice A soit canonisable, il faut et il suffit :

Ou bien que A soit semblable à une canonique Λ_0 (n°s 7 et 3);

Où bien que les deux faisceaux (n° 7)

$$rE - A \quad \text{et} \quad rE - A_0$$

soient équivalents, c'est-à-dire (théorème de Weierstrass, n° 8) admettent les mêmes successifs.

Or (lemme du n° 11) le faisceau caractéristique $rE - A_0$ de la canonique A_0 a tous ses successifs simples et le théorème du n° 9 est démontré.

13. Si pour le faisceau caractéristique $rE - A$ on a tous les successifs simples et

$$|rE - A| = (r - \rho)^m (r - \rho')^{m'} (r - \rho'')^{m''} \dots$$

$$(\rho \neq \rho' \neq \rho'' \neq \dots),$$

on construira la canonique A_0

$$A_0(x, y) = \rho(x_1 y_1 + \dots + x_m y_m)$$

$$+ \rho'(x_{m+1} y_{m+1} + \dots + x_{m+m'} y_{m+m'})$$

$$+ \rho''(\dots) + \dots,$$

et l'on sera sûr de l'équivalence des faisceaux $rE - A$ et $rE - A_0$, de la similitude de A avec la canonique A_0 et de la canonisabilité de A .

14. Voici quelques applications de ma proposition du n° 9.

Frobenius (*J. f. r. u. a. M.*, t. LXXXIV, p. 53) signale que dans le faisceau caractéristique d'une orthogonale R réelle, tous les successifs sont simples. Toutes les matrices R doivent donc être canonisables. C'est ce que j'ai effectivement établi, par voie directe, dans mon travail *Sur l'Hermitien* (*loc. cit.*, nos 22, 35 et 36).

Pareillement, dans ce même travail, je montre que toute hermitienne ou toute unitaire (*loc. cit.*, n° 22) et même toute orthogonale (car la démonstration vaut

aussi pour une orthogonale), est canonisable, donc : *le faisceau caractéristique d'une hermitienne, d'une unitaire ou d'une orthogonale a tous ses successifs simples. Il en est de même pour une substitution d'ordre fini, toujours canonisable (M. Jordan).*

15. Il me semblerait surprenant que ma proposition du n° 9, conséquence si immédiate du théorème de Weierstrass, eût échappé jusqu'à ce jour à la sagacité des algébristes. J'en publie néanmoins la démonstration et l'énoncé, n'ayant rien trouvé dans aucun Mémoire de Mathématiques, qui ressemblât au théorème du n° 9. Au surplus, si la proposition ne se trouvait pas nouvelle, la démonstration le serait peut-être.