

G. FONTENÉ

Sur le système articulé de M. Kempe

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 3
(1903), p. 529-549

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__529_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[R1e]

SUR LE SYSTÈME ARTICULÉ DE M. KEMPE;

PAR M. G. FONTENÉ.

Le résultat principal de ce Mémoire est l'apparition d'une relation involutive indépendante des points cycliques dans une question d'ordre purement métrique.

§ 1. — LES HYPOTHÈSES.

1. M. Kempe a fait connaître (*Proceedings of the London Mathematical Society*, t. IX, 1878, p. 133) un système articulé dont il a deviné presque tous les cas de déformabilité. M. Darboux a donné une étude analytique remarquable du problème (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, t. III, 1879, p. 151). La

Fig. 1.

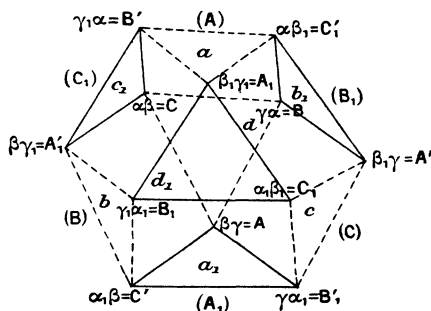


figure 1 représente ce système sous l'aspect qui m'a paru le plus propre à en montrer les diverses symétries.

2. Je définirai l'appareil comme composé de huit triangles :

d	a	b	c
d_1	a_1	b_1	c_1

formant d'une part 2 tétrades, d'autre part 4 couples; *2 triangles qui n'appartiennent ni à une même tétrade ni à un même couple sont articulés entre eux.* Les 2 triangles d'un couple seront dits *opposés*; le point d'articulation de 2 triangles, et le point d'articulation des deux triangles opposés aux premiers, seront 2 points opposés.

J'emploierai, pour les 12 points d'articulation, deux systèmes de notations. Dans l'un, les points sont désignés par les couples de lettres $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ avec des indices convenables; les sommets des divers triangles empruntent alors leurs notations aux lettres du Tableau suivant :

$\alpha\beta\gamma$	$\alpha\beta_1\gamma_1$	$\beta\gamma_1\alpha_1$	$\gamma\alpha_1\beta_1$
$\alpha_1\beta_1\gamma_1$	$\alpha_1\beta\gamma$	$\beta_1\gamma\alpha$	$\gamma_1\alpha\beta$

L'autre système de notations est donné par ce Tableau :

$$\begin{array}{llll}
 \beta\gamma = A, & \beta_1\gamma_1 = A_1, & \beta_1\gamma = A', & \beta\gamma_1 = A'_1; \\
 \gamma\alpha = B, & \gamma_1\alpha_1 = B_1, & \gamma_1\alpha = B', & \gamma\alpha_1 = B'_1; \\
 \alpha\beta = C, & \alpha_1\beta_1 = C_1, & \alpha_1\beta = C', & \alpha\beta_1 = C'_1.
 \end{array}$$

Deux points opposés sont $\beta\gamma$ et $\beta_1\gamma_1$, $\beta_1\gamma$ et $\beta\gamma_1$, ..., ou encore A et A_1 , A' et A'_1 , ..., de même que deux triangles opposés sont d et d_1 , a et a_1 , ...

3. Les 3 couples de combinaisons (da, bc) , (db, ca) , (dc, ab) fournissent la manière de voir adoptée par M. Kempe, et qui est aussi celle de M. Darboux.

On peut, de trois manières différentes, regarder le système comme formé de *deux chaînes de 4 triangles réunies entre elles par les derniers sommets des triangles*.

On a désigné par (A) et (A_1) , (B) et (B_1) , (C) et (C_1) les trois couples de contours quadrangulaires articulés bordés par les triangles en question, et il importe de bien remarquer deux modes distincts de correspondance entre (A) et (A_1) par exemple.

A un point de vue qui prend de l'importance par la suite, les sommets de ces deux quadrilatères sont deux à deux des points opposés,

$$(1) \quad \begin{cases} (A) & \alpha\beta, & \alpha\gamma, & \alpha\beta_1, & \alpha\gamma_1, \\ (A_1) & \alpha_1\beta_1, & \alpha_1\gamma_1, & \alpha_1\beta, & \alpha_1\gamma, \end{cases}$$

ou encore

$$(1') \quad \begin{cases} (A) & C, & B, & C_1, & B', \\ (A_1) & C_1, & B_1, & C', & B'_1, \end{cases}$$

et les triangles qui bordent ces deux quadrilatères sont

$$(1'') \quad \begin{cases} (A) & d, & b_1, & a, & c_1, \\ (A_1) & d_1, & b, & a_1, & c. \end{cases}$$

A un autre point de vue, les sommets des deux quadrilatères sont, afin de rapprocher les côtés qui portent des triangles articulés entre eux,

$$(2) \quad \begin{cases} (A) & \alpha\beta, & \alpha\gamma, & \alpha\beta_1, & \alpha\gamma_1, \\ (A_1) & \alpha_1\beta, & \alpha_1\gamma, & \alpha_1\beta_1, & \alpha_1\gamma_1 \end{cases}$$

ou encore

$$(2') \quad \begin{cases} (A) & C, \quad B, \quad C', \quad B', \\ (A_1) & C', \quad B', \quad C_1, \quad B_1, \end{cases}$$

et les points d'attache des triangles sont

$$\beta\gamma, \quad \beta_1\gamma, \quad \beta_1\gamma_1, \quad \beta\gamma_1$$

ou

$$A, \quad A', \quad A_1, \quad A'_1:$$

ces triangles sont d'ailleurs

$$(2'') \quad \begin{cases} (A) & d, \quad b_1, \quad a, \quad c_1, \\ (A_1) & a_1, \quad c, \quad d_1, \quad b. \end{cases}$$

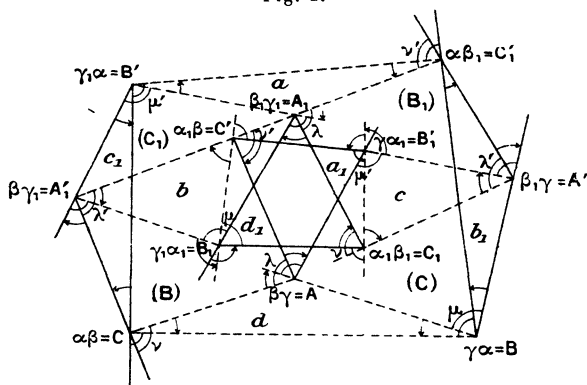
4. La figure, dans son état de généralité, a 21 paramètres de grandeur puisqu'elle est définie par 12 points. Comme les 8 triangles, considérés en eux-mêmes, ont 24 paramètres de grandeur, la possibilité de les agencer comme sur la figure soumet leurs éléments à 3 conditions, en dehors de la question de déformabilité. Si l'on supprime 4 tiges, de sorte qu'il en reste 20, on obtiendra un appareil déformable; si donc l'appareil complet est déformable, il présente 4 tiges surabondantes.

La Note actuelle est relative au second cas de déformabilité de M. Kempe; dans le Mémoire de M. Darboux, c'est la solution III, avec $\varepsilon = -1$ (p. 170 et 185).

L'appareil (comme on le verra) dépend alors de 7 paramètres de grandeur, sans compter le paramètre de déformation. Si l'on part de la figure où les triangles sont agencés, le nombre des conditions de déformabilité est donc 13. Si l'on considère les triangles isolément, le nombre des conditions est 17, les 4 tiges surabondantes entrant comme les autres en ligne de compte.

La figure 2 est relative à ce cas ; et il importe de suivre sur cette figure les faits indiqués au n° 3. On remar-

Fig. 2.



quera, en particulier $[(1), (1'), (1'')]$, les deux quadrilatères

$$CBC_1'B' \quad \text{et} \quad C_1B_1C'B'_1,$$

qui sont (comme l'on verra) inversement semblables, et dont les côtés homologues portent des triangles équivalents d et d_1 , b_1 et b , a et a_1 , c_1 et c ; en outre $[(2), (2'), (2'')]$, si l'on écrit

$$CBC_1'B' \quad \text{et} \quad C'B'_1C_1B_1,$$

les côtés correspondants portent les triangles d et a_1 , b_1 et c , a et d_1 , c_1 et b , articulés entre eux, et dont les angles à la base sont liés simplement. Les deux autres couples de quadrilatères sont indiqués sur la figure, et ont d'ailleurs les mêmes propriétés que le couple dont on vient de parler.

5. Je donnerai d'abord l'énoncé des 17 conditions *distinctes* relatives aux triangles, en choisissant celles

qui sont les plus symétriques par rapport à l'ensemble du système. Je les séparerai en deux groupes, l'un contenant 12 relations angulaires (dont la dernière est la relation involutive signalée au début), l'autre contenant 5 relations d'aires; le plan étant orienté par la flèche circulaire φ , les angles seront considérés avec leurs signes, ainsi que les aires.

1° En premier lieu, les 24 angles de triangles, dont 16 seulement sont paramétriques, doivent vérifier 12 conditions, qui laissent 4 paramètres. Les arcs qui désignent ces angles sur la figure sont munis d'une flèche.

a. D'une part, les deux triangles qui se réunissent en un point d'articulation doivent *γ* avoir le même angle, au sens suivant : au point $\alpha\beta$ ou C, par exemple, on doit avoir (à $k\pi$ près)

$$(CB, CA) = (CB', CA'_1),$$

ces angles étant comptés à partir du quadrilatère (A) vers le quadrilatère (B), de manière que ces deux quadrilatères aient même angle en ce point. On a indiqué sur la figure les angles de cette nature, en les comptant de (B) vers (C), de (C) vers (A), de (A) vers (B), et en s'arrangeant pour que, dans chaque triangle, les trois angles marqués aient une somme nulle.

Voici dès lors l'intérêt de la notation adoptée :

Au point C ou $\alpha\beta$, par exemple, les deux angles marqués peuvent être désignés par $\beta - \alpha$, et il en est de même pour tous les angles analogues.

En effet, prenant arbitrairement un angle α , on peut désigner par

$$\beta - \alpha, \quad \alpha - \gamma, \quad \beta_1 - \alpha, \quad \alpha - \gamma_1 \quad .$$

les 4 angles fournis par les sommets du quadrilatère (A), ces angles étant comptés alternativement à partir de ce

quadrilatère et vers lui, c'est-à-dire de (A) vers (B), ou de (C) vers (A); l'angle du triangle d marqué au point $\beta\gamma$ est alors $\gamma - \beta$, etc. On peut de même désigner momentanément par $\beta' - \alpha_1$, $\alpha_1 - \gamma'$, ..., les 4 angles fournis par les sommets du quadrilatère (A_1), ces sommets étant pris dans l'ordre du Tableau (2) ou (2') où l'on a égard aux points d'attache des triangles; l'angle du triangle a_1 marqué au point $\beta\gamma$ est alors $\gamma' - \beta'$, etc. Comme on veut avoir [Tableau (2'')]]

$$\gamma' - \beta' = \gamma - \beta, \quad \dots, \quad .$$

c'est-à-dire

$$\beta' - \beta = \gamma' - \gamma = \beta_1 - \beta_1 = \gamma_1 - \gamma_1,$$

on prend

$$\beta' = \beta, \quad \gamma' = \gamma, \quad \dots,$$

et les angles fournis par les sommets du quadrilatère (A_1) sont

$$\beta - \alpha_1, \quad \alpha_1 - \gamma, \quad \dots$$

Le fait annoncé est établi.

On a ainsi 11 conditions (et non 12); il reste pour le moment 5 paramètres angulaires, correspondant aux cinq différences

$$\beta - \alpha, \quad \gamma - \alpha, \quad \beta_1 - \alpha, \quad \gamma_1 - \alpha, \quad \alpha_1 - \alpha.$$

a'. Il n'est pas fait mention dans le Mémoire de M. Kempe d'une relation angulaire essentielle, à savoir la relation (39-40) du Mémoire de M. Darboux. Aux sommets des deux quadrilatères (A) et (A_1) qui se correspondent d'après le Tableau (2), les angles de triangles *comptés à partir des quadrilatères* sont respectivement

$$\begin{aligned} \beta - \alpha, \quad \gamma - \alpha, \quad \beta_1 - \alpha, \quad \gamma_1 - \alpha, \\ \beta - \alpha_1, \quad \gamma - \alpha_1, \quad \beta_1 - \alpha_1, \quad \gamma_1 - \alpha_1, \quad . \end{aligned}$$

de sorte que les angles de la seconde suite sont ceux de la première augmentés d'une même quantité $\alpha - \alpha_1$. L'expression de cette différence a été donnée par M. Darboux. Avec les notations actuelles, la formule de cet auteur conduit au résultat suivant :

Si l'on regarde les trois couples d'angles $\alpha, \alpha_1; \beta, \beta_1; \gamma, \gamma_1$ comme les arguments de trois couples de droites menées par un point dans un plan, le faisceau de ces droites doit être en involution.

On a d'une part trois relations à 4 termes

$$\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\gamma - \alpha)} \cdot \frac{\sin(\beta - \alpha_1)}{\sin(\gamma - \alpha_1)} = \frac{\sin(\beta_1 - \alpha_1)}{\sin(\gamma_1 - \alpha_1)} \cdot \frac{\sin(\beta_1 - \alpha)}{\sin(\gamma_1 - \alpha)}, \quad \dots,$$

ou encore, en égalant le produit des extrêmes au produit des moyens,

$$\frac{\sin C \sin C_1}{\sin B \sin B'} = \frac{\sin C_1 \sin C'}{\sin B_1 \sin B'_1}, \quad \dots;$$

les deux membres de la première relation sont liés aux deux quadrilatères (A) et (A₁).

On a, d'autre part, quatre relations à 3 termes

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\beta - \alpha_1)}{\sin(\alpha_1 - \gamma)} \times \frac{\sin(\gamma - \beta_1)}{\sin(\beta_1 - \alpha)} \times \frac{\sin(\alpha - \gamma_1)}{\sin(\gamma_1 - \beta)} &= -1, \\ \frac{\sin(\beta_1 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_1 - \gamma_1)} \times \frac{\sin(\gamma_1 - \beta)}{\sin(\beta - \alpha)} \times \frac{\sin(\alpha - \gamma)}{\sin(\gamma - \beta_1)} &= -1, \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \sin A' \sin B' \sin C' &= - \sin A'_1 \sin B'_1 \sin C'_1, \\ \sin A_1 \sin B'_1 \sin C &= - \sin A \sin B' \sin C_1, \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

nous reviendrons sur les quatre hexagones, très visibles dans la figure 1, auxquels se rattachent ces dernières relations.

a". Donc : Si l'on prend arbitrairement un angle α , on peut déterminer 5 angles $\beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, tels que les angles de triangles soient $\gamma - \beta, \dots$; et, si l'on regarde les trois couples d'angles comme les arguments de trois couples de directions rapportées à un axe Ox , ces trois couples de directions sont en involution.

Les 4 paramètres angulaires sont ceux d'un faisceau involutif de 6 droites.

2° En second lieu, les 8 paramètres relatifs à la grandeur des triangles doivent satisfaire à 5 conditions, qui laissent 3 nouveaux paramètres. Soient $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$, et $\bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1, \bar{d}_1$ les aires algébriques des triangles, les sommets étant pris dans l'ordre $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ pour chaque triangle.

b. D'une part, les aires algébriques de deux triangles opposés doivent être égales.

b'. D'autre part, la somme des aires algébriques $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ doit être nulle.

b". On doit donc avoir

$$(3) \quad \begin{cases} \bar{d} + \bar{d}_1 = 0, & \bar{a} + \bar{a}_1 = 0, & \bar{b} + \bar{b}_1 = 0, & \bar{c} + \bar{c}_1 = 0, \\ & \bar{d} + \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0. \end{cases}$$

On peut écrire

$$\bar{d} - \bar{b}_1 + \bar{a} - \bar{c}_1 = 0$$

ou

$$\overline{ABC} - \overline{A'BC'_1} + \overline{A_1B'C'_1} - \overline{A'_1B'C} = 0$$

ou, en changeant les signes,

$$\overline{ACB} + \overline{A'BC'_1} + \overline{A_1C'_1B'} + \overline{A'_1B'C} = 0;$$

la somme algébrique des aires des triangles construits sur les côtés du quadrilatère (A) par exemple doit donc être nulle, le premier sommet étant successivement A, A', A₁, A'₁, les deux derniers sommets étant pris dans l'ordre circulaire CBC'₁B'.

6. Voici une conséquence des hypothèses faites, dont nous aurons à faire usage; l'involution a' joue ici un rôle important. Considérons, par exemple, les côtés de triangles qui doivent former les deux quadrilatères (A₁) et (A); je dis que l'on a

$$(4) \quad \frac{C_1 B_1}{CB} = \frac{B_1 C'}{BC'_1} = \frac{C' B'_1}{C'_1 B'} = \frac{B'_1 C_1}{B'C} (= k).$$

On a, en effet, indépendamment des conditions (3).

$$\begin{aligned} \frac{\overline{d}_1}{d} &= \left(\frac{C_1 B_1}{CB} \right)^2 \\ &\times \left(\frac{\sin(\beta_1 - \alpha_1) \sin(\alpha_1 - \gamma_1)}{\sin(\gamma_1 - \beta_1)} : \frac{\sin(\beta - \alpha) \sin(\alpha - \gamma)}{\sin(\gamma - \beta)} \right), \end{aligned}$$

et, en échangeant β et β_1 ,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{b}}{b_1} &= \left(\frac{B_1 C'}{BC'_1} \right)^2 \\ &\times \left(\frac{\sin(\beta - \alpha_1) \sin(\alpha_1 - \gamma_1)}{\sin(\gamma_1 - \beta)} : \frac{\sin(\beta_1 - \alpha) \sin(\alpha - \gamma)}{\sin(\gamma - \beta_1)} \right); \end{aligned}$$

les deux parenthèses qui contiennent des sinus sont égales, la suppression du facteur commun

$$\sin(\alpha_1 - \gamma_1) : \sin(\alpha - \gamma)$$

réduisant cette égalité à la suivante

$$\frac{\sin(\gamma - \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} : \frac{\sin(\gamma_1 - \beta_1)}{\sin(\alpha_1 - \beta_1)} = \frac{\sin(\gamma - \beta_1)}{\sin(\alpha - \beta_1)} : \frac{\sin(\gamma_1 - \beta)}{\sin(\alpha_1 - \beta)},$$

que le changement des moyens transforme en la seconde

des relations à quatre termes fournies par l'involution supposée. On a donc

$$(5) \quad \frac{\overline{d_1}}{\overline{d}} : \frac{\overline{b}}{\overline{b_1}} = \left(\frac{C_1 B_1}{CB} \right)^2 : \left(\frac{B_1 C'}{BC'_1} \right)^2;$$

en vertu des relations (3) on a, par suite, la première des relations (4).

On a facilement la valeur de k qui correspond à l'hypothèse $d_1 = -d, \dots$; si l'on prend, par exemple, les triangles b et b_1 , cela donne, d'après ce qui précède,

$$-\frac{1}{k^2} = \frac{\sin(\beta - \alpha_1) \sin(\alpha_1 - \gamma_1) \sin(\gamma - \beta_1)}{\sin(\beta_1 - \alpha) \sin(\alpha - \gamma) \sin(\gamma_1 - \beta)};$$

or, la seconde relation d'involution à trois termes est

$$-1 = \frac{\sin(\beta_1 - \alpha_1) \sin(\gamma_1 - \beta) \sin(\alpha - \gamma)}{\sin(\beta - \alpha) \sin(\gamma - \beta_1) \sin(\alpha_1 - \gamma_1)};$$

on a donc, en multipliant,

$$(6) \quad k^2 = \frac{\sin(\beta - \alpha) \sin(\beta_1 - \alpha)}{\sin(\beta_1 - \alpha_1) \sin(\beta - \alpha_1)},$$

et l'on aurait une formule analogue avec γ au lieu de β ; on peut écrire

$$(6') \quad k^2 = \frac{\sin C \sin C'_1}{\sin C_1 \sin C'} = \frac{\sin B \sin B'}{\sin B_1 \sin B'_1}.$$

On aurait des expressions analogues pour k'^2 et k''^2 en considérant les couples de quadrilatères (B_1) et (B) , (C_1) et (C) .

§ II. — DÉFORMABILITÉ DU SYSTÈME.

7. Laissons maintenant de côté la figure 2, considérons (fig. 3 et 4) 8 triangles qui seront simplement astreints aux 17 conditions a'' et b'' ; nous allons montrer qu'il est possible de construire avec ces triangles la

figure 2, et cela d'une infinité de façons, ce qui donne un appareil déformable.

La démonstration qu'on va lire est imitée de celle de M. Kempe, et nous emploierons en les modifiant légèrement les notations de l'auteur; nous remplacerons

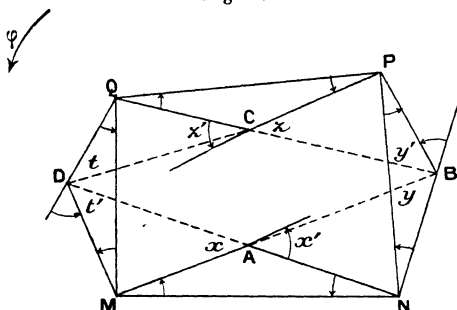
$$(C, B, C', B'), \quad (C_1, B_1, C', B'_1), \quad (A, A', A_1, A'_1),$$

par

$$(M, N, P, Q), \quad (M_1, N_1, P_1, Q_1), \quad (A, B, C, D).$$

a. La figure 3 se compose de 4 triangles, dont les

Fig. 3.



angles marqués sur la figure satisfont aux 4 conditions

$$(7) \quad M = M, \quad N = N, \quad P = P, \quad Q = Q;$$

les angles A, B, C, D, qui sont ceux de la figure 2 changés de signes, seront désignés par $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$, de sorte que l'on aura

$$\hat{A} = M + N, \quad \hat{B} = N + P, \quad \hat{C} = P + Q, \quad \hat{D} = Q + M,$$

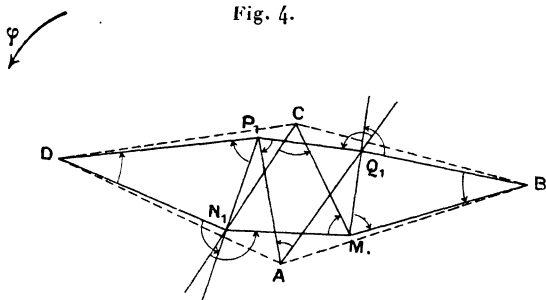
avec

$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D};$$

nous représenterons par a, b, c, d les quatre côtés du quadrilatère MNPQ, par $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ les aires $\overline{AMN}$,

— $\overline{BNP}$, $\overline{CPQ}$, — $\overline{DQM}$, qui sont positives dans le cas de figure adopté.

b. La figure 4 est analogue à la figure 3, et d'ailleurs complètement déterminée par elle. Les sommets du quadrilatère étant pris dans l'ordre P_1 , Q_1 , M_1 , N_1 [Ta-



bleau (2')], on a d'abord les quatre conditions d'angles

$$(8) \quad P_1 = P_1, \quad Q_1 = Q_1, \quad M_1 = M_1, \quad N_1 = N_1.$$

Afin d'avoir (fig. 3 et 4, quadrilatères $MNPQ$ et $P_1Q_1M_1N_1$)

$$\hat{A} = \hat{A}, \quad \hat{B} = \hat{B}, \quad \hat{C} = \hat{C}, \quad \hat{D} = \hat{D}$$

ou

$$\begin{aligned} \hat{A} &= P_1 + Q_1, & \hat{B} &= Q_1 + M_1, \\ \hat{C} &= M_1 + N_1, & \hat{D} &= N_1 + P_1, \end{aligned}$$

on a en second lieu les trois conditions

$$(9) \quad P_1 - M = -(Q_1 - N) = M_1 - P = -(N_1 - Q) (= \delta);$$

les angles de triangles comptés à partir des quadrilatères sont respectivement

$$\begin{aligned} M, & \quad -N, & P, & \quad -Q, \\ P_1, & \quad -Q_1, & M_1, & \quad -N_1, \end{aligned}$$

et les angles de la seconde suite sont ceux de la première suite augmentés d'une même quantité δ . On doit remar-

quer les égalités

$$M - P = A - B = -(C - D) = -(M_1 - P_1),$$

$$N - Q = B - C = -(D - A) = -(N_1 - Q_1).$$

La valeur commune des différences (9), désignée précédemment par $(\alpha - \alpha_1)$, doit en outre donner lieu à l'involution a' ; il n'est pas sans intérêt de retrouver par cette voie la formule de M. Darboux, bien que les relations d'involution vraiment essentielles ici soient celles qui ont été écrites. Désignons par m, n, p, q les cotangentes des angles marqués sur la figure aux points M, N, P, Q; on aura

$$\text{tang}(\beta - \alpha) = \frac{1}{m}, \quad \text{tang}(\gamma - \alpha) = -\frac{1}{n},$$

$$\text{tang}(\beta_1 - \alpha) = \frac{1}{p}, \quad \text{tang}(\gamma_1 - \alpha) = -\frac{1}{q};$$

l'involution en question donne la relation

$$\begin{vmatrix} 0 \times \text{tang}(\alpha_1 - \alpha) & 0 + \text{tang}(\alpha_1 - \alpha) & 1 \\ \frac{1}{mp} & \frac{1}{m} - \frac{1}{p} & 1 \\ \frac{1}{np} & -\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{q}\right) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(10) \quad \cot \delta = \frac{nq - mp}{m + n + p + q} = \frac{\Delta}{S};$$

dans le Mémoire de M. Darboux, m, n, p, q représentent les quantités désignées ici par $\frac{1}{m}, -\frac{1}{n}, \frac{1}{p}, -\frac{1}{q}$, et de plus les lettres M_1, N_1, P_1, Q_1 remplacent les lettres P_1, Q_1, M_1, N_1 . On a alors, pour le quadrilatère (A_1) ,

$$(10') \quad \begin{cases} m_1 = \frac{p\Delta - S}{pS + \Delta} = \frac{p\Delta - S}{(p+n)(p+q)}, \\ -n_1 = \frac{q\Delta + S}{qS - \Delta} = \frac{q\Delta + S}{(q-p)(q+m)}, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

D'autre part, en suivant ici l'ordre M, N, P, Q [Tableau (1')], et en observant que les couples de points *opposés* sont M et M_1 , N et N_1 , ..., A et C , B et D , on a les quatre conditions d'aires

$$(11) \quad \overline{A_1} = -\overline{A}, \quad \overline{B_1} = -\overline{B}, \quad \overline{C_1} = -\overline{C}, \quad \overline{D_1} = -\overline{D},$$

les notations $\overline{A_1}$, $\overline{B_1}$, ... désignant les aires $\overline{CM_1N_1}$, $-\overline{DN_1P_1}$,

On a alors

$$\frac{M_1N_1}{MN} = \frac{N_1P_1}{NP} = \frac{P_1Q_1}{PQ} = \frac{Q_1M_1}{QM} (=k),$$

$$k^2 = \frac{\sin M \sin P}{\sin M_1 \sin P_1} = \frac{\sin N \sin Q}{\sin N_1 \sin Q_1}.$$

a'. Nous joindrons enfin aux conditions (7) qui concernent la figure 3 la nouvelle condition

$$(12) \quad \overline{A} + \overline{C} = \overline{B} + \overline{D}.$$

c. La figure 3 possède un paramètre de déformation, l'angle MNP par exemple; nous supposons que, dans la figure 4, l'angle $M_1N_1P_1$ est égal à l'angle MNP , de sorte que les deux quadrilatères $MNPQ$ et $M_1N_1P_1Q_1$ sont inversement semblables. La figure 3 dépend de 7 paramètres, sans compter le paramètre de déformation, puisque les 12 éléments des triangles sont astreints aux 5 conditions (7) et (12); la figure 4 est complètement déterminée par la figure 3, au moyen des 12 conditions (8), (9) et (10), (11) et de l'hypothèse relative à l'angle $M_1N_1P_1$; l'ensemble des deux figures dépend de 7 paramètres, sans compter le paramètre de déformation.

[Relativement à la figure 4, M. Kempe fait les hypo-

thèses

$$\begin{array}{lll} M_1 = M_1, & \hat{A} = \hat{A}, & a_1 = ka, \\ N_1 = N_1, & \hat{B} = \hat{B}, & b_1 = kb, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \end{array}$$

qui forment onze conditions distinctes, et, dans une rédaction d'ailleurs très concise, affirme, sans démonstration formelle, la possibilité de déterminer k de manière à avoir à la fois

$$\bar{A}_1 = -\bar{A}, \quad \bar{B}_1 = -\bar{B}, \quad \dots$$

(l'auteur ne met pas de signes); cette possibilité est une conséquence de l'involution a'' , ou, si l'on veut, de la relation (10) de M. Darboux. Voici comment M. Kempe calcule la valeur de k . En posant

$$P = \frac{a^2 c^2}{\bar{A} \bar{C} \sin A \sin C} = \frac{b^2 d^2}{\bar{B} \bar{D} \sin B \sin D},$$

on a la relation facile à vérifier

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a^2}{\bar{A}} \cot A + \frac{c^2}{\bar{C}} \cot C \right) - \left(\frac{b^2}{\bar{B}} \cot B + \frac{d^2}{\bar{D}} \cot D \right) \\ &= \frac{P}{2} \sin(M - P) \sin(N - Q); \end{aligned}$$

pour la figure 4, il faut remplacer a par ka , $\bar{A}$ par $-\bar{A}$, $\hat{A}$ par $\hat{C}$, par suite P par Pk^4 , et l'on a

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{a^2}{\bar{A}} \cot C + \frac{c^2}{\bar{C}} \cot A \right) + \left(\frac{b^2}{\bar{B}} \cot D + \frac{d^2}{\bar{D}} \cot B \right) \\ &= \frac{P}{2} k^2 \sin(M - P) \sin(N - Q); \end{aligned}$$

si l'on retranche membre à membre, en tenant compte des égalités

$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D}, \quad \frac{a^2}{\bar{A}} + \frac{c^2}{\bar{C}} = \frac{b^2}{\bar{B}} + \frac{d^2}{\bar{D}},$$

on obtient par exemple

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\bar{A}}{a^2} + \frac{\bar{C}}{c^2} \right) \frac{\sin(B+D)}{\sin B \sin D} (\sin B \sin D - \sin A \sin C) \\ &= \frac{1}{2} (k^2 - 1) \sin(M-P) \sin(N-Q); \end{aligned}$$

à cause de $A = M + N$, ..., il reste

$$1 - k^2 = 2 \left(\frac{\bar{A}}{a^2} + \frac{\bar{C}}{c^2} \right) \frac{\sin(B+D)}{\sin B \sin D} = \dots$$

M. Darboux donne la formule

$$k^2 = \frac{(nq - mp)^2 + (m + n + p + q)^2}{(m + n)(m + q)(p + n)(p + q)},$$

à laquelle on arrive en observant que les hypothèses

$$\bar{A}_1 + \bar{A} = 0, \quad \dots$$

donnent

$$-k^2 = \frac{m_1 + n_1}{m + n} = \frac{n_1 + p_1}{n + p} = \dots,$$

et en tenant compte des formules (10'); la relation entre m, n, p, m_1, n_1, p_1 qui se présente ici exprime l'involution dont on a parlé : si l'on y regarde n et n_1 comme des variables, on peut faire en effet n et n_1 infinis, ou $n = -m$ avec $n_1 = -m_1$, ou $n = -p$ avec $n_1 = -p_1$.]

8. Il s'agit de faire voir que les quadrilatères ABCD des figures 3 et 4 sont égaux. On a d'abord, en ayant égard aux couples de points opposés,

$$\frac{\bar{B}}{\bar{A}} = \frac{NP \times NB}{NM \times NA}, \quad \frac{\bar{B}}{\bar{A}} = \frac{N_1 P_1 \times N_1 D}{N_1 M_1 \times N_1 C},$$

et par suite

$$\frac{NB}{NA} = \frac{N_1 D}{N_1 C};$$

les triangles ANB et CN, D sont donc inversement semblables. Il en est de même des triangles CQD et A₁Q₁B. Or on a, dans la figure 3,

$$\begin{aligned} (\text{AB}, \text{CD}) &= (\text{AB}, \text{NB}) + (\text{NB}, \text{NP}) + (\text{NP}, \text{QM}) \\ &\quad + (\text{QM}, \text{QD}) + (\text{QD}, \text{CD}) \\ &= (\text{AB}, \text{NB}) + (\text{NP}, \text{QM}) + (\text{QD}, \text{CD}) + (\text{N} - \text{Q}); \end{aligned}$$

la figure 4 donne de même

$$\begin{aligned} (\text{CD}, \text{AB}) \\ = (\text{CD}, \text{N}_1\text{D}) + (\text{N}_1\text{P}_1, \text{Q}_1\text{M}_1) + (\text{Q}_1\text{B}, \text{AB}) + (\text{N}_1 - \text{Q}_1); \end{aligned}$$

d'après la similitude inverse des quadrilatères (A), (A₁), et celle des triangles mentionnés plus haut, les seconds membres des deux égalités ont même valeur absolue et des signes contraires; l'angle (AB, CD) a donc la même valeur dans les deux figures.

Il reste à montrer que la longueur AB, par exemple, est aussi la même dans les deux figures. On a (*fig. 3*)

$$\begin{aligned} \overline{\text{MP}}^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{\text{MNP}}, \\ \overline{\text{AB}}^2 &= \frac{a^2 \sin^2 \text{M}}{\sin^2 \text{A}} + \frac{b^2 \sin^2 \text{P}}{\sin^2 \text{B}} - \frac{2ab \sin \text{M} \sin \text{P}}{\sin \text{A} \sin \text{B}} \cos \widehat{\text{MNP}}; \end{aligned}$$

et, en éliminant $\cos \widehat{\text{MNP}}$,

$$\begin{aligned} \overline{\text{AB}}^2 \sin \text{A} \sin \text{B} - \overline{\text{MP}}^2 \sin \text{M} \sin \text{P} \\ = \frac{a^2 \sin \text{M}}{\sin \text{A}} (\sin \text{M} \sin \text{B} - \sin \text{P} \sin \text{A}) \\ + \frac{b^2 \sin \text{P}}{\sin \text{B}} (\sin \text{P} \sin \text{A} - \sin \text{M} \sin \text{B}); \end{aligned}$$

la première parenthèse devient

$$\begin{aligned} \sin \text{M} (\sin \text{P} \cos \text{N} + \sin \text{N} \cos \text{P}), \\ - \sin \text{P} (\sin \text{M} \cos \text{N} + \sin \text{N} \cos \text{M}) \end{aligned}$$

ou

$$\sin \text{N} \sin (\text{M} - \text{P});$$

la relation entre AB et MP devient, par l'introduction des aires $\overline{A}$ et $\overline{B}$,

$$(13) \quad \begin{cases} \overline{AB}^2 \sin A \sin B - \overline{MP}^2 \sin M \sin P \\ = 2(\overline{A} - \overline{B}) \sin(M - P). \end{cases}$$

On a de même (*fig. 3*)

$$(14) \quad \begin{cases} \overline{CD}^2 \sin C \sin D - \overline{MP}^2 \sin M \sin P \\ = 2(\overline{D} - \overline{C}) \sin(M - P); \end{cases}$$

par analogie, on a dans la figure 4,

$$(15) \quad \begin{cases} \overline{AB}^2 \sin A \sin B - k^2 \overline{MP}^2 \sin M_1 \sin P_1 \\ = 2(\overline{D} - \overline{C}) \sin(M_1 - P_1); \end{cases}$$

comme on a

$$\overline{A} + \overline{C} = \overline{B} + \overline{D},$$

les seconds membres des relations (13) et (15) sont égaux; on a, d'autre part,

$$k^2 \sin M_1 \sin P_1 = \sin M \sin P;$$

la longueur AB est donc la même dans les deux figures.

M. Kempe, qui ne donne pas la formule (6) pour k^2 , s'appuie directement sur les relations d'aires qui déterminent la valeur de k . La relation fournie par l'élimination de $\cos \widehat{MNP}$, peut s'écrire

$$\begin{aligned} \overline{MP}^2 - \overline{AB}^2 \frac{\sin A \sin B}{\sin M \sin P} \\ = \left(\frac{a^2 \sin M}{\sin A} - \frac{b^2 \sin P}{\sin B} \right) \times \left(\frac{\sin A}{\sin M} - \frac{\sin B}{\sin P} \right), \end{aligned}$$

ou, en multipliant la première parenthèse du second membre par $\sin N$ et en divisant la seconde par $\sin N$,

$$\overline{MP}^2 - \overline{AB}^2 \frac{\sin A \sin B}{\sin M \sin P} = (\overline{A} - \overline{B}) \times \left(\frac{a^2}{\overline{A}} - \frac{b^2}{\overline{B}} \right);$$

à cause de

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{\overline{A}} - \frac{b^2}{\overline{B}} \right) \\ &= \frac{\sin P \sin A - \sin M \sin B}{\sin M \sin N \sin P} = \frac{-\sin(M - P)}{\sin M \sin P} = \frac{-\sin(A - B)}{\sin M \sin P}, \end{aligned}$$

on peut donc écrire

$$(13') \quad \begin{cases} \overline{MP}^2 + \overline{AB}^2 \frac{\sin A \sin B}{2 \sin(A - B)} \left(\frac{a^2}{\overline{A}} - \frac{b^2}{\overline{B}} \right) \\ = (\overline{A} - \overline{B}) \times \left(\frac{a^2}{\overline{A}} - \frac{b^2}{\overline{B}} \right). \end{cases}$$

On a de même (*fig. 3*)

$$(14') \quad \begin{cases} \overline{MP}^2 + \overline{CD}^2 \frac{\sin C \sin D}{2 \sin(C - D)} \left(\frac{c^2}{\overline{C}} - \frac{d^2}{\overline{D}} \right) \\ = (\overline{C} - \overline{D}) \times \left(\frac{c^2}{\overline{C}} - \frac{d^2}{\overline{D}} \right); \end{cases}$$

par analogie, la figure 4 donne, *après suppression du facteur commun* k^2 ,

$$(15') \quad \begin{cases} \overline{MP}^2 + \overline{AB}^2 \frac{\sin A \sin B}{2 \sin(A - B)} \left(\frac{a^2}{\overline{A}} - \frac{b^2}{\overline{B}} \right) \\ = (\overline{A} - \overline{B}) \times \left(\frac{a^2}{\overline{A}} - \frac{b^2}{\overline{B}} \right); \end{cases}$$

la comparaison des formules (13') et (15') donne le résultat cherché.

Le calcul de l'auteur, un peu différent de celui qu'on vient de lire, donne lieu à cette remarque. M. Kempe a signalé le premier, dans un *Mémoire* reproduit par la *Nouvelle correspondance mathématique* (t. III, p. 133), le fait suivant :

Pendant la déformation d'un quadrilatère articulé MNPQ, les cosinus de deux angles opposés sont

liés par une relation linéaire; pour les angles N et Q par exemple, cela résulte des deux expressions de la diagonale MP fournies par les triangles MNP et MQP. Dans la figure 3, cette relation se transforme en une relation linéaire entre les quantités $\overline{AB}^2$ et $\overline{CD}^2$; la comparaison des formules (13) et (14) donne ainsi, en tenant compte de l'hypothèse $\overline{A} + \overline{C} = \overline{B} + \overline{D}$,

$$\overline{CD}^2 \sin C \sin D = \overline{AB}^2 \sin A \sin B;$$

on peut écrire, avec les notations de la figure 2,

$$\left(\frac{A_1 A'_1}{AA'} \right)^2 = \frac{\sin A \sin A'}{\sin A_1 \sin A'_1},$$

et cette formule, qui fait connaître le rapport de similitude des quadrilatères (C_1) et (C) , se déduit de la formule (6') par permutation circulaire.

9. Les 12 angles variables des 3 quadrilatères (A) , (B) , (C) ou (A_1) , (B_1) , (C_1) sont égaux deux à deux (*fig. 2*). Au point A par exemple, l'angle intérieur du quadrilatère (B) et l'angle extérieur du quadrilatère (C) sont égaux. Ces angles sont :

Quadrilatère (A)	angles	ν , μ , ν' , μ'
» (B)	»	λ , ν , λ' , ν'
» (C)	»	μ , λ , μ' , λ'

λ et λ' sont intérieurs pour (B) , extérieurs pour (C) ; μ et μ' sont intérieurs pour (C) et (A) ; ν et ν' sont extérieurs pour (A) et (B) ; on a ainsi

$$(16) \quad \lambda + \lambda' = \mu + \mu' = \nu + \nu'. \quad (A \text{ suivre.})$$