

PAUL-J. SUCHAR

Sur une propriété appartenant à certaines hélices

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 3
(1903), p. 511-514

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__511_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[M'g]
SUR UNE PROPRIÉTÉ APPARTENANT A CERTAINES HÉLICES;

PAR M. PAUL-J. SUCHAR.

Considérons les courbes C , C_1 et C_2 , où C_1 est le lieu des centres de la sphère osculatrice à la courbe C , et C_2 le lieu des centres de la sphère osculatrice à la courbe C_1 ; $M(x, y, z)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ trois points

correspondants; M_1 étant le centre de la sphère correspondant à M , et M_2 le centre de la sphère correspondant à M_1 .

Je me propose de démontrer le théorème suivant :

Si les distances des points M_1 et M_2 aux plans osculateurs aux courbes C et C_1 sont constantes, ces courbes sont des hélices.

En effet, soient $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''$ les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale à la courbe C au point M . Les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la bi-normale au point correspondant M_1 seront aux signes près $\alpha'', \beta'', \gamma''; \alpha', \beta', \gamma'; \alpha, \beta, \gamma$. Désignons encore par ρ et τ, ρ_1 et τ_1 les rayons de courbure et de torsion de deux courbes aux points M et M_1 , et par s et s_1 les arcs de deux courbes.

Nous aurons, d'après les formules de Frenet,

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{ds} = \frac{\alpha'}{\rho}, & \frac{dx''}{ds_1} = \frac{\alpha'}{\rho_1}, \\ \frac{dx''}{ds} = \frac{\alpha'}{\tau}, & \frac{dx}{ds_1} = \frac{\alpha'}{\tau_1}, \end{cases}$$

d'où

$$(2) \quad \frac{ds_1}{ds} = \frac{\rho_1}{\tau} = \frac{\tau_1}{\rho}.$$

Cette dernière formule nous montre que, si la courbe C est une hélice, la courbe C_1 sera aussi une hélice.

Remarquons que les distances des points M_1 et M_2 aux plans osculateurs en M et M_1 sont $\tau \frac{d\rho}{ds}$ et $\tau_1 \frac{d\rho_1}{ds_1}$; on aura alors

$$(3) \quad \tau \frac{d\rho}{ds} = A,$$

$$(4) \quad \tau_1 \frac{d\rho_1}{ds_1} = A_1,$$

A et A_1 étant des constantes. Je dis que les rayons de courbures aux points M , M_1 et M_2 sont égaux.

En effet, on a pour les coordonnées du point M_1

$$x_1 = x + \rho \alpha' - \tau \frac{d\rho}{ds} \alpha'',$$

$$y_1 = y + \rho \beta' - \tau \frac{d\rho}{ds} \beta'',$$

$$z_1 = z + \rho \gamma' - \tau \frac{d\rho}{ds} \gamma'';$$

d'où, en différentiant et en ayant égard aux formules de Frenet, on aura

$$dx_1 = - \left[\frac{\rho}{\tau} + \frac{d}{ds} \left(\tau \frac{d\rho}{ds} \right) \right] \alpha'' ds,$$

$$dy_1 = - \left[\frac{\rho}{\tau} + \frac{d}{ds} \left(\tau \frac{d\rho}{ds} \right) \right] \beta'' ds,$$

$$dz_1 = - \left[\frac{\rho}{\tau} + \frac{d}{ds} \left(\tau \frac{d\rho}{ds} \right) \right] \gamma'' ds;$$

et comme on a, aux signes près,

$$\frac{dx_1}{ds_1} = \alpha'', \quad \frac{dy_1}{ds_1} = \beta'', \quad \frac{dz_1}{ds_1} = \gamma'',$$

on aura, en ayant égard à (2),

$$\frac{\rho_1}{\tau} = \pm \left[\frac{\rho}{\tau} + \frac{d}{ds} \left(\tau \frac{d\rho}{ds} \right) \right],$$

et, par analogie,

$$\frac{\rho_2}{\tau_1} = \pm \left[\frac{\rho_1}{\tau_1} + \frac{d}{ds_1} \left(\tau_1 \frac{d\rho_1}{ds_1} \right) \right].$$

Il résulte donc, d'après (3) et (4), que ces rayons de courbure sont égaux.

Si nous divisons les relations (3) et (4), on trouve, en ayant égard à (2),

$$\frac{\tau}{\rho} = \pm \frac{A}{A_1},$$

c'est-à-dire que la courbe C est une hélice, et d'après la remarque faite au début, il résulte que les courbes C_1 et C_2 sont aussi des hélices. On remarque que le théorème proposé est en défaut si la constante $A = 0$, car cette condition entraîne aussi la condition $A_1 = 0$. En effet, la courbe C_2 coïncide avec la courbe C , puisque φ est constant, et les deux courbes C et C_1 sont alors réciproques; le rapport $\frac{\tau}{\varphi}$ sera indéterminé.