

ANDRÉ BIENAYMÉ

**Essai sur le déplacement d'un madrier
sur deux rouleaux non parallèles**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 3
(1903), p. 485-496

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__485_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[08e]

**ESSAI SUR LE DÉPLACEMENT D'UN MADRIER
SUR DEUX ROULEAUX NON PARALLÈLES;**

PAR M. LE LIEUTENANT ANDRÉ BIENAYME.

I. — GÉNÉRALITÉS.

Lorsqu'un madrier reposant sur deux rouleaux cylindriques parallèles est sollicité par une force normale aux rouleaux, il peut se déplacer en les faisant rouler sous lui sans qu'il y ait glissement le long des généra-

trices de contact, la condition pour qu'il en soit ainsi est que l'effet de la force ne désoriente pas le madrier qui soit transporté parallèlement à lui-même.

Ceci est évident dans le cas où la direction du madrier est elle-même normale aux génératrices de contact, mais on peut le vérifier aisément dans le cas d'une disposition oblique, cas que l'on n'envisage généralement pas dans la pratique parce que le travail utile y est relativement moindre.

Dans la disposition communément adoptée le madrier est normal aux génératrices de contact et la force de traction est exercée dans la direction même du madrier, mais l'on conçoit, et la chose s'observe dans la pratique, que le déplacement se ferait encore dans le même sens si la force avait une direction légèrement oblique, introduisant ainsi une composante normale au déplacement et dont tout le travail serait absorbé par les résistances qui s'opposent au glissement.

Par analogie avec ce cas simple nous pensons que, *dans le cas général où les deux rouleaux ne sont plus parallèles, il doit exister à chaque instant, pour une surface plane matérielle pesante reposant sur eux, un déplacement infinitésimal d'élection* que la surface effectue quelle que soit la force qui la mette en mouvement pourvu que sa direction et son intensité restent comprises dans certaines limites.

Nous nous proposons ici, comme contribution à ce problème mécanique, d'en étudier le cas limite théorique qui se prête à une discussion purement géométrique, en envisageant, non plus la surface plane du madrier, mais simplement *une droite matérielle se déplaçant sans glissement sur deux rouleaux cylindriques d'égal diamètre roulant sous elle sur un plan fixe.*

II. — POSSIBILITÉ DE CE MOUVEMENT SANS GLISSEMENT.

Considérons d'abord un seul rouleau cylindrique : soit G la génératrice du cylindre passant par le point de contact de la droite D . On voit immédiatement deux mouvements satisfaisant à la condition de s'effectuer sans glissement, à savoir : une rotation de la droite dans le plan tangent autour de son point de contact, rotation qui ne déplace le point de contact, ni sur la droite, ni sur le cylindre; puis une translation perpendiculairement à G , translation qui a pour effet de faire rouler le cylindre sur le plan fixe, son axe progressant deux fois moins vite que D , comme on peut s'en rendre compte en remplaçant le cylindre par un prisme d'un nombre infini de faces; on vérifie aisément que les éléments décrits sur la droite et sur le cylindre par leurs points de contact successifs sont égaux, c'est-à-dire que la translation considérée s'est effectuée sans glissement.

Nous allons maintenant montrer que pour qu'une rotation infiniment petite de D déplace cette droite et, par suite, le cylindre sans qu'il y ait glissement, il faut et il suffit que le centre de rotation soit sur la génératrice G de contact.

La condition est suffisante : en effet ⁽¹⁾, soit un point O situé à une distance infiniment petite δ de la génératrice G ; désignons par a la distance de O au point de contact A de la droite mobile D et de G , et faisons tourner D autour de O d'un angle ϵ égal à $\frac{2\delta}{a}$; A vient en A' sur la normale élevée en A à G , et

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

l'on a

$$AA' = 2\delta;$$

élevons la perpendiculaire $O\gamma$ sur le milieu de AA' , et soit A_1 son intersection avec la nouvelle position D_1 de D , la parallèle D'_1 menée par A_1 à D rencontre AA' en un point A'_1 ; $A'A'_1$ est infiniment petit du second ordre, et l'on a

$$AA'_1 = 2\delta,$$

en négligeant les infiniment petits de cet ordre; si donc l'on fait effectuer successivement à la droite D les deux mouvements élémentaires sans glissement envisagés plus haut, à savoir ici une translation de D en D'_1 , après laquelle la nouvelle génératrice de contact G_1 est précisément OA_1 , puis une rotation $\hat{\epsilon}$ de D'_1 autour de A_1 qui ne change pas la génératrice de contact, on amènera D sur D_1 et les points de D se trouveront respectivement à une distance infiniment petite du second ordre des points correspondants de D_1 ; la rotation autour de O , point infiniment voisin de G , donne donc lieu à un mouvement sans glissement.

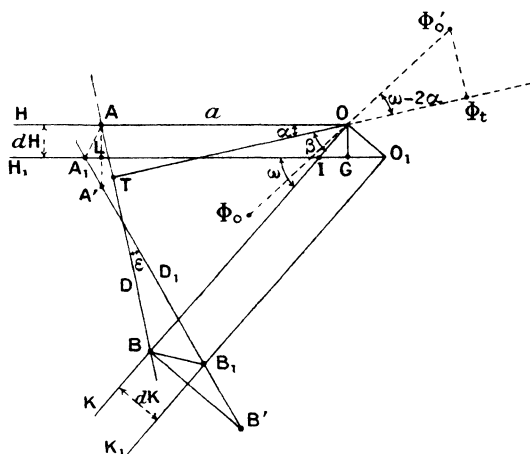
La condition est d'ailleurs nécessaire, car la rotation d'une droite D autour d'un point O extérieur à G peut se décomposer en une rotation sans glissement autour du point d'intersection de G et de la normale à D passant par O , suivie d'une translation de la droite obliquement à G , celle-ci accompagnée de glissement.

De ces considérations élémentaires il résulte que le mouvement sans glissement d'une droite sur deux cylindres circulaires égaux roulant sur un plan fixe est possible et ne l'est que d'une seule manière : *il faut et il suffit, pour qu'un pareil mouvement ait lieu, que le centre instantané de rotation pour la droite soit au point de concours fictif des génératrices de contact.*

III. — COURBES [A] ET [B], LIEUX DES POINTS DE CONTACT SUCCESSIFS AVEC LES CYLINDRES. COURBE [O], LIEU DU POINT D'INTERSECTION FICTIF DES GÉNÉRATRICES DE CONTACT. TANGENTE ET RAYON DE COURBURE EN UN POINT.

Soient A et B (*fig. 1*) les points de contact de la

Fig. 1.



droite mobile D et des cylindres, H et K les génératrices de contact faisant entre elles l'angle $\hat{\omega}$, et O le point de rencontre de leurs prolongements; soient de plus $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ les angles de D avec les normales à H et K, et dH , dK les distances respectives infinitésimales de H et K aux génératrices voisines H_1 et K_1 ; si l'on pose enfin

$$\begin{aligned} OA &= a, & AA_1 &= dA, \\ OB &= b, & BB_1 &= dB, \end{aligned}$$

et

$$OO_1 = dO,$$

on a les égalités

$$(1) \quad \begin{cases} dH = \frac{1}{2} a \varepsilon, \\ dK = \frac{1}{2} b \varepsilon; \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} dA = \frac{1}{2} \frac{a}{\cos \alpha} \varepsilon, \\ dB = \frac{1}{2} \frac{b}{\cos \beta} \varepsilon; \end{cases}$$

$$(3) \quad dO = \frac{1}{2} \frac{AB}{\sin \omega} \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{a \sin \alpha + b \sin \beta}{\sin \omega} \varepsilon.$$

Les égalités (1) et (2) sont évidentes; l'égalité (3) se vérifie aisément : soit I l'intersection de H₁ et de K, on a

$$OI = \frac{dH}{\sin \omega}, \quad O_1 I = \frac{dK}{\sin \omega},$$

ce qui, joint aux égalités (1), montre que les triangles OO₁I et ABO sont semblables, le rapport de similitude étant égal à

$$\frac{\varepsilon}{2 \sin \omega},$$

on a donc

$$dO = \frac{1}{2} \frac{AB}{2 \sin \omega} \varepsilon;$$

on en conclut aussi que la tangente à la courbe [O] est symétrique de D par rapport à la bissectrice de l'angle des droites H et K, bissectrice dont la direction est fixe.

De même, la tangente en A à la courbe [A] est symétrique de D par rapport à H, car le triangle AA₁A' doit être considéré comme isocèle.

Les formules (2) et (3) permettent de construire les rayons de courbure R_a, R_b, R_o, aux différents points A, B et O.

Leur expression est

$$(4) \quad \begin{cases} R_a = \frac{a}{2 \cos \alpha}, & R_b = \frac{b}{2 \cos \beta}, \\ R_o = \frac{AB}{2 \sin \omega} = \frac{a \sin \alpha + b \sin \beta}{2 \sin \omega}. \end{cases}$$

Au moyen de ces formules et de la direction précédemment indiquée des tangentes on peut déterminer les centres de courbure correspondants.

Rayons de courbure de l'enveloppe [T] de D. — Le centre de courbure Φ_t de la courbe [T] enveloppe de la droite D est lié d'une façon très simple aux points O et Φ_o , centre de courbure de [O] : il est situé sur la normale OT à D, au pied de la perpendiculaire abaissée du point Φ'_o , symétrique de Φ_o par rapport à O.

En effet, T est le point de contact de D avec son enveloppe, d'autre part Φ_t et Φ_o doivent voir OO_1 sous le même angle $\hat{\varepsilon}$, ils sont d'ailleurs de part et d'autre de OO_1 , d'où la construction indiquée. On a donc l'expression

$$(4bis) \quad R_t = OT + R_o \cos(\omega - 2\alpha).$$

en particulier pour $\omega = \frac{\pi}{2}$,

$$R_t = 2 OT.$$

IV. — L'aire du triangle formé par la droite mobile et les deux génératrices de contact est constante. ENVELOPPE [T] DE D.

L'enveloppe [T] de D par rapport au plan fixe n'est autre que le lieu des pieds T des perpendiculaires abaissées des points successifs O, O_1 , ... sur les positions successives de D. Considérons un plan mobile appliqué

sur le plan de la figure et entraîné d'un mouvement de translation par le point O variable sur le plan fixe. Par rapport à ce plan mobile la droite variable D dans ses positions successives enveloppe une courbe C dont la podaire prise par rapport au point fixe O est le lieu sur ce plan des points successifs $T, T_1, \dots$; cette podaire et la courbe $[T]$ sont donc intimement liées l'une à l'autre; aussi allons-nous étudier d'abord la courbe C enveloppe relative de D dans le plan mobile.

Prenons comme sens positif sur la génératrice H le sens de O vers A , et soit G le pied de la perpendiculaire abaissée de O et L celui de la perpendiculaire abaissée de A sur H_1 ; on a

$$da = \overline{O_1 G} + \overline{LA_1}, \quad \overline{O_1 G} = \overline{O_1 I} + \overline{IG},$$

et, en supposant $\omega < \frac{\pi}{2}$, comme $\overline{O_1 I}$ sera toujours positif et $\overline{IG}$ négatif

$$da = \overline{LA_1} + |O_1 I| - |IG|;$$

d'ailleurs

$$LA_1 = dH \tan \alpha,$$

en grandeur et en signe si l'on convient de regarder $\hat{\alpha}$ comme l'angle ayant pour origine OA , pour extrémité OT , le sens positif étant celui de la rotation qui amène OA sur OB par un angle égal à $\hat{\omega}$; posant enfin $\omega = \alpha + \beta$, on obtient

$$(5) \quad \begin{cases} da = \frac{\varepsilon}{2} a \left(\tan \alpha + \frac{\cos \alpha}{\cos \beta \sin \omega} + \cot \omega \right), \\ db = -\frac{\varepsilon}{2} b \left(\tan \beta + \frac{\cos \beta}{\cos \alpha \sin \omega} + \cot \omega \right). \end{cases}$$

Formant la quantité $a da + b db$, double de la diffé-

entielle de l'aire AOB, on trouve

$$a db + b da = \frac{2}{2} \frac{ab}{\sin \omega} \left[(\tan \alpha - \tan \beta) \sin \omega + \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} - \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right],$$

la quantité entre crochets peut s'écrire

$$\frac{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta) + \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}{\cos \alpha - \cos \beta}$$

ou

$$\frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}{\cos \alpha - \cos \beta},$$

sous cette forme il est visible qu'elle est nulle : l'aire AOB est donc constante et la courbe C est une hyperbole ayant pour asymptotes les droites du plan entraîné qui coïncident à chaque instant avec les génératrices de contact.

Autre démonstration. — Intégrons la formule (5), l'on a

$$\log a = \frac{1}{2} \left(-\log \cos \alpha + \int \frac{\cos \alpha}{\cos \beta \sin \omega} d\alpha + \alpha \cot \omega \right) + C,$$

puis remplaçant sous le signe d'intégration $\cos \alpha$ par $\cos(\omega - \beta)$, et comme $d\alpha = -d\beta$,

$$\log a = \frac{1}{2} (-\log \cos \alpha + \log \cos \beta) + C$$

ou

$$\log a = \log \frac{\cos^{\frac{1}{2}} \beta}{\cos^{\frac{1}{2}} \alpha} + C',$$

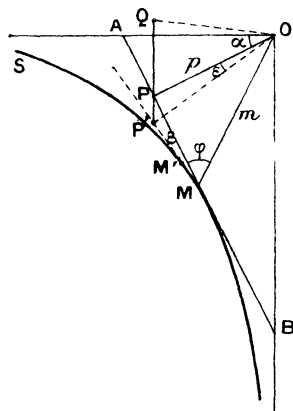
donc

$$\frac{a^2 \cos \alpha}{\cos \beta} = k^2 \quad \text{ou} \quad ab = k^2.$$

V. — RECTIFICATIONS DE LA COURBE [T] ET DE LA COURBE [O]. ANALOGIE AVEC DES PODAIRES D'HYPÉROLE DANS LE CAS $\omega = \frac{\pi}{2}$.

LEMME. — Soient une courbe [S] (fig. 2) et un

Fig. 2.



point O par rapport auquel on prend la podaire [P] de [S]. Soit P le point de [P] correspondant à la tangente MP de [S], si l'on appelle $\hat{\epsilon}$ l'angle de contingence des deux tangentes infiniment voisines MP, M'P', l'arc infinitésimal dP de la podaire est donné par

$$dP = OM \epsilon.$$

En effet, appelons p et m les vecteurs OP et OM, l'angle $\hat{\varphi}$ de PM et MO se retrouve en $P\hat{P}'O$, donc

$$dP = \frac{p \epsilon}{\sin \varphi}$$

ou

$$p = m \sin \varphi,$$

donc

$$dP = m \varepsilon, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Revenons au problème principal. Dans le cas $\omega = \frac{\pi}{2}$ les formules (4) et (4^{bis}) donnent pour R_o et R_t les expressions simples

$$R_o = \frac{AB}{2}, \quad R_t = 2 OT;$$

soit M le milieu de AB, c'est aussi le point de contact sur l'hyperbole, et, dans ce cas particulier où l'hyperbole est équilatère,

$$\frac{AB}{2} = OM.$$

Appliquons le lemme à la podaire de l'hyperbole équilatère prise par rapport à O, on a

$$dP = OM \varepsilon$$

et comme $OM = R_o$,

$$(6) \quad dP = R_o \varepsilon = dO,$$

ce qui montre l'égalité qui existe entre les arcs correspondants de [O] et de la podaire [P].

Remarquons que la tangente en P à la podaire d'hyperbole équilatère fait avec l'asymptote OA un angle $3\hat{\alpha}$, car $\hat{\varphi} = 2\hat{\alpha}$; appliquant alors une nouvelle fois le lemme, et désignant par dQ l'arc correspondant de la deuxième podaire [Q], podaire de [P] par rapport à O, on a (*fig. 2*)

$$dQ = OP d(3\alpha);$$

mais

$$OP \equiv OT$$

(fig. 1 et fig. 2), donc

$$dT = \frac{2}{3} dQ.$$

On peut remarquer que la tangente en Q à la podaire de l'hyperbole équilatère fait un angle $\hat{\alpha} - \frac{\pi}{2}$ avec OA.

On conclura donc, dans le cas $\omega = \frac{\pi}{2}$:

1° L'enveloppe [T] de la droite D est une courbe dont l'arc infinitésimal est égal en longueur aux deux tiers de l'arc correspondant de la deuxième podaire centrale de l'hyperbole équilatère associée; son rayon de courbure, égal au double de la distance de la droite au point O, est aussi égal aux dix tiers du rayon correspondant de cette deuxième podaire.

2° Le lieu [O] du point fictif d'intersection des génératrices, O, est une courbe dont l'arc infinitésimal est égal en longueur à l'arc correspondant de la première podaire centrale de l'hyperbole; son rayon de courbure égal à la moitié du segment de la droite compris entre les génératrices est triple du rayon correspondant de cette première podaire.