

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 3
(1903), p. 42-46

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__42_2

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1903.

(1901, p. 47.)

Si l'on considère les courbes tracées sur une même quadrique, le rapport anharmonique de quatre courbes quelconques, tangentes à une même biquadratique, est constant lorsque ces courbes appartiennent à un faisceau tel qu'elles ne coupent la biquadratique qu'en deux points variables.

(H. LÉAUTÉ.)

SOLUTION

Par M. R. BRICARD.

Ce théorème résulte de la proposition suivante :

Soit $f(u)$ une fonction elliptique du second ordre, construite sur les deux périodes $2\omega_1, 2\omega_2$. Si l'on désigne par $2k$ la somme des deux pôles de $f(u)$, le rapport anhar-

nique des quatre quantités

$$f(k), \quad f(k + \omega_1), \quad f(k + \omega_2), \quad f(k + \omega_3),$$

où

$$\omega_3 = -\omega_1 - \omega_2$$

est indépendant de la fonction f et a pour valeur

$$\frac{e_1 - e_3}{e_1 - e_2},$$

en posant, suivant l'usage,

$$p \omega_1 = e_1, \quad p \omega_2 = e_2, \quad p \omega_3 = e_3.$$

Autrement dit, ce rapport anharmonique est un *invariant absolu* pour les fonctions elliptiques du second ordre, admettant des périodes données.

Considérons, en effet, les deux fonctions elliptiques

$$f(u), \quad p(u - k).$$

Elles admettent les mêmes périodes $2\omega_1, 2\omega_2$. Il existe donc entre elles une relation algébrique, qui est nécessairement linéaire par rapport à chacune d'elles. Donnons-nous, en effet, une valeur quelconque α ; $f(u)$ prendra cette valeur pour deux arguments u_1 et u_2 liés par les relations

$$u_1 + u_2 = 2k,$$

d'où il résulte

$$p(u_1 - k) = p(u_2 - k).$$

Ainsi à une valeur de $f(u)$ ne correspond qu'une valeur de $p(u - k)$. De même. . . . Donc, etc.

Il résulte de là que u_1, u_2, u_3, u_4 étant quatre arguments quelconques, le rapport anharmonique des quatre valeurs correspondantes de $f(u)$ est égal à celui des quatre valeurs correspondantes de $p(u - k)$. Faisons, en particulier,

$$u_1 = k,$$

$$u_2 = k + \omega_1,$$

$$u_3 = k + \omega_2,$$

$$u_4 = k + \omega_3.$$

On aura

$$\begin{aligned} \frac{f(k) - f(k + \omega_2)}{f(k + \omega_1) - f(k + \omega_2)} &: \frac{f(k) - f(k + \omega_3)}{f(k + \omega_1) - f(k + \omega_3)} \\ &= \frac{p(o) - p\omega_2}{p\omega_1 - p\omega_2} : \frac{p(o) - p\omega_3}{p\omega_1 - p\omega_3} = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}, \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Cela posé, soient C la biquadratique considérée, $2\omega_1$ et $2\omega_2$ les périodes des fonctions elliptiques qui peuvent servir à la représentation paramétrique de cette courbe, (F) un faisceau de courbes algébriques tracées sur les quadriques, et dont chacune ne rencontre C qu'en deux points. Chaque courbe de (F) est déterminée par un paramètre λ qui est connu lui-même rationnellement si l'on donne l'un des points de rencontre de cette courbe avec C. Soit u le paramètre elliptique de ce point. On aura

$$\lambda = f(u),$$

f étant une certaine fonction elliptique. En vertu de l'hypothèse faite, $f(u)$ ne peut prendre la même valeur que pour deux valeurs de u ; c'est donc une fonction elliptique du second ordre.

Soit $2k$ la somme des pôles de cette fonction. Les arguments de deux points de C situés sur une même courbe (F) satisfont à la relation

$$u_1 + u_2 = 2k + \text{période}.$$

Pour trouver les courbes (F) tangentes à C, on fera dans cette égalité $u_1 = u_2$. On voit ainsi qu'il existe quatre telles courbes (F), et que les arguments des points de contact sont

$$k, \quad k + \omega_1, \quad k + \omega_2, \quad k + \omega_3.$$

Le théorème à démontrer est maintenant une conséquence immédiate du lemme établi au début.

1918.

(1901, p. 336.)

Construire le point où une normale à une parabole coupe la développée de cette courbe, en dehors du point où elle est tangente à la développée. (M. D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par M. E. DUPORCQ.

On sait que les pieds de trois normales concourantes à une parabole forment un triangle dont le centre de gravité est sur l'axe. Soient donc M le pied d'une normale, A le point où elle coupe la développée en dehors du centre de courbure en M, enfin N le pied de la normale qui touche la développée en A. Le point A peut être considéré comme l'intersection de trois normales, dont deux sont confondues et normales en N, la troisième étant la normale en M. Par suite, le point N est de l'autre côté que M par rapport à l'axe, et à une distance deux fois moins grande. Il est donc facile à construire : on en déduit la normale NA et le point A.

La construction inverse donnerait le centre de courbure A relatif au point N.

Autres solutions de MM. BARISIEN, BROCARD, LEZ et VALDÈS.

1921.

(1902, p. 96)

Démontrer que pour tout nombre entier n on a l'inégalité

$$\left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1} \right)^2 > n\pi$$

et que, lorsque n augmente indéfiniment, la différence des deux termes de l'inégalité tend vers zéro.

(E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. G. MONNET.

La proposition énoncée se rattache directement aux propriétés de l'intégrale classique

$$\psi(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx.$$

Rappelons, en effet, les formules

$$\psi(2n) = \frac{1.3.5\dots 2n-1}{2.4.6\dots 2n} \frac{\pi}{2},$$

$$\psi(2n+1) = \frac{2.4.6\dots 2n}{1.3.5\dots 2n+1},$$

et l'inégalité évidente

$$\psi(2n-1) > \psi(2n) > \psi(2n+1).$$

Il viendra

$$\frac{2.4.6\dots 2n-2}{1.3.5\dots 2n-1} > \frac{1.3.5\dots 2n-1}{2.4.6\dots 2n} \frac{\pi}{2} > \frac{2.4.6\dots 2n}{1.3.5\dots 2n+1}.$$

Multiplions les trois membres par

$$2n \frac{2.4.6\dots 2n}{1.3.5\dots 2n-1};$$

nous obtiendrons les inégalités

$$\left(\frac{2.4.6\dots 2n}{1.3.5\dots 2n-1} \right)^2 > n\pi > \frac{2n}{2n+1} \left(\frac{2.4.6\dots 2n}{1.3.5\dots 2n-1} \right)^2$$

qui démontrent la proposition.