

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 3
(1903), p. 366-369

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__366_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

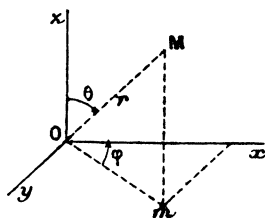
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Lille

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Étudier l'effet d'un système de percussions sur un solide mobile autour d'un axe fixe. Théorie du centre de percussion.*

PROBLÈME. — Un point matériel libre est défini par ses coordonnées polaires (r, θ, φ) . Il est sollicité par une force



dérivant de la fonction de force U

$$U = f(r) + \frac{g(\theta)}{r^2} + \frac{h(\varphi)}{r^2 \sin^2 \theta},$$

les fonctions f, g, h ne dépendant chacune que de la variable mise en évidence.

1° Former l'expression de la force vive du point et les équations de Lagrange relatives aux paramètres r, θ, φ ;

2° Montrer que ces équations s'intègrent par quadratures.

SOLUTION.

L'équation de Lagrange relative à φ donne immédiatement l'intégrale première

$$(1) \quad r^4 \sin^4 \theta \cdot \varphi'^2 = 2h(\varphi) + A.$$

En tenant compte de la valeur de φ'^2 fournie par cette équation, l'équation de Lagrange relative à θ donne

$$(2) \quad r^4 \cdot \theta'^2 = 2g(\theta) - \frac{A}{\sin^2 \theta} + B.$$

Enfin l'équation des forces vives s'écrit, eu égard à (1) et à (2),

$$(3) \quad r'^2 = 2f(r) - \frac{B}{r^2} + C,$$

A, B, C désignent des constantes. (3) donne r en fonction de t , (2) donne θ et (1) donne φ , et cela au moyen de trois quadratures.
(Novembre 1901.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Distribution des accélérations dans le cas du mouvement général d'un solide. Application au cas des mouvements parallèles à un plan.*

II. *Les extrémités d'une barre AB glissent sans frottement : l'une A sur une droite verticale Oz, l'autre B sur un plan horizontal xOy. Cette barre, de longueur l, est homogène et pesante; sa densité est l'unité. Au point B est appliquée une force dirigée suivant $\overline{BO}$ et proportionnelle à la distance $\overline{BO}$.*

1° *En désignant par θ et φ les angles $\widehat{OAB}$ et $\widehat{xOB}$, on formera les équations canoniques du mouvement de la barre relatives à ces paramètres;*

2° *On exprimera en fonction de θ , par des quadratures, le temps et l'angle φ (conditions initiales quelconques);*

3° *On formera et intégrera l'équation de Jacobi associée à la fonction d'Hamilton rencontrée au 1°. On reconnaîtra l'identité des équations finies du mouvement obtenues par la méthode de Jacobi avec les résultats obtenus au 2°.*

(Juillet 1902.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Pendule sphérique.*

PROBLÈME. — *Un losange formé de quatre tiges pesantes et homogènes, de poids p et de longueur a, articulées à leurs extrémités, a un sommet fixe en O; le sommet opposé C est assujéti à glisser sur la verticale de O. Au sommet C est appliqué un poids P.*

Le plan du losange est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de la verticale OC.

1° *Mouvement du losange dans son plan;*

2° *Position d'équilibre stable;*

3° *Vitesse de rotation pour laquelle, dans cette position d'équilibre, l'écartement des sommets A et B est égal à a;*

4° *Durée des petites oscillations du système supposé légèrement dérangé de sa position d'équilibre stable dans cette dernière hypothèse.*

SOLUTION.

1° Si θ est l'angle d'une des barres avec $\widehat{OC}$, le temps est

donné en fonction de θ par une quadrature hyperelliptique

$$t = \int \sqrt{\frac{\frac{pa^2}{3g}(5 - 3\cos 2\theta) + \frac{Pa^2}{g}2\sin^2\theta}{2a(P + 2p)\cos\theta + \frac{pa^2\omega^2}{3g}\sin^2\theta + h}} d\theta;$$

2° $\cos\theta = \frac{3g(P + 2p)}{2a\omega^2 p}$ si la valeur de $\cos\theta$ est plus petite que 1; sinon la position d'équilibre stable est $\theta = 0$;

$$3^\circ \quad \omega^2 = \frac{\sqrt{3}g(P + 2p)}{ap};$$

$$4^\circ \quad T = \pi \sqrt{\frac{a(2P + 5p)}{g(P + 2p)}}. \quad (\text{Novembre 1902.})$$