

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 3
(1903), p. 333-336

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__333_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSEES.

1952.

(1992, p. 576.)

Trouver toutes les fractions rationnelles

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

jouissant de la propriété que, si on les développe suivant les puissances croissantes de x , les coefficients du développement soient égaux à zéro, à $+1$ ou à -1 .

(LAGUERRE.)

SOLUTION

Par M. E. LANDAU.

Sans restreindre la généralité, on peut supposer que le dénominateur $f(x)$ ne disparaît pas pour $x = 0$; car si le développement de $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ suivant les puissances croissantes de x renfermait des termes à exposants négatifs

$$(1) \quad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{a_0}{x^s} + \frac{a_1}{x^{s-1}} + \dots + \frac{a_{s-1}}{x} + a_s + a_{s+1}x + \dots,$$

on aurait

$$\frac{x^s \varphi(x)}{f(x)} = a_0 + a_1 x + \dots + a_s x^s + \dots,$$

où les coefficients sont les mêmes que dans (1): on obtient donc toutes les fractions rationnelles satisfaisant aux conditions du problème en ne cherchant que celles où $f(0) \neq 0$ et en les divisant par une puissance quelconque x à exposant entier et ≥ 0 .

On connaît bien l'exemple de la progression géométrique

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots \quad (|x| < 1),$$

appartenant aux fonctions cherchées; on en déduit successivement ces autres fonctions qui ne sont guère plus générales :

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{1-x^k} = 1 + x^k + x^{2k} + \dots,$$

k désignant un entier positif quelconque,

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x)}{f(x)} &= \frac{b_0 + b_1 x + \dots + b_{k-1} x^{k-1}}{1 - x^k} \\ &= (b_0 + b_1 x + \dots + b_{k-1} x^{k-1}) (1 + x^k + x^{2k} + \dots) \\ &= b_0 + b_1 x + \dots + b_{k-1} x^{k-1} + b_0 x^k + \dots \\ &\quad + b_{k-1} x^{2k-1} + b_0 x^{2k} + \dots, \end{aligned}$$

où $b_0, b_1, \dots, b_{k-1}$ désignent k nombres dont chacun égale soit zéro, soit $+1$, soit -1 , enfin

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\varphi(x)}{f(x)} &= a_0 + a_1 x + \dots \\ &\quad + a_{m-1} x^{m-1} + \frac{b_0 + b_1 x + \dots + b_{k-1} x^{k-1}}{1 - x^k} x^m \\ &= a_0 + a_1 x + \dots \\ &\quad + a_{m-1} x^{m-1} + b_0 x^m + b_1 x^{m+1} + \dots \\ &\quad + b_{k-1} x^{m+k-1} + b_0 x^{m+k} + \dots \\ &\quad + b_{k-1} x^{m+2k-1} + b_0 x^{m+2k} + \dots, \end{aligned} \right.$$

où m désigne un entier ≥ 1 , k un entier ≥ 1 , et $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, b_0, b_1, \dots, b_{k-1}$ des nombres quelconques égaux à zéro, à $+1$ ou à -1 .

Je dis maintenant que, inversement, toute série

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\varphi(x)}{f(x)} &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \\ &\quad (a_n = 0, +1, -1), \end{aligned} \right.$$

si elle représente une fonction rationnelle, est contenue dans le type (2) et peut, par conséquent, être mise sous la forme

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = G(x) + H(x) \frac{x^m}{1 - x^k},$$

$G(x)$ et $H(x)$ désignant des polynômes de degrés $m-1$ et $k-1$ respectivement.

En effet, soient, dans (3), ρ le degré de $\varphi(x)$, r celui de $f(x)$; l'on sait que les coefficients a_n satisfont, pour tout nombre v supérieur ou égal au plus grand τ des deux nombres 0 et $\rho - r + 1$, à une formule de récurrence

$$(4) \quad a_{v+r} = \gamma_1 a_{v+r-1} + \gamma_2 a_{v+r-2} + \dots + \gamma_r a_v,$$

où $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ sont des constantes. On en conclut que, par une succession de r coefficients $a_v, a_{v+1}, \dots, a_{v+r-1}$, le coefficient suivant a_{v+r} est complètement déterminé, quel que soit le rang v où cette suite commence, v étant $\geq \tau$.

Je considère maintenant les $3r + r$ nombres

$$a_\tau, a_{\tau+1}, \dots, a_{\tau+3r+r-1};$$

ils renferment $3^r + 1$ systèmes de r coefficients successifs

$$(5) \quad a_\nu, \quad a_{\nu+1}, \quad \dots, \quad a_{\nu+r-1},$$

savoir pour $\nu = \tau, \tau + 1, \dots, \tau + 3^r$. Chaque a_ν ne pouvant avoir, par hypothèse, que trois valeurs distinctes, un système de r coefficients ne peut être formé que du nombre fini de 3^r manières différentes; parmi les $3^r + 1$ systèmes (5), il faut donc qu'il y en ait au moins deux qui soient égaux terme à terme; il existe donc deux nombres m et k ($m \geq \tau, k \geq 1$) tels que

$$a_m = a_{m+k}, \quad a_{m+1} = a_{m+k+1}, \quad \dots, \quad a_{m+r-1} = a_{m+k+r-1}.$$

En vertu de (4), on en déduit successivement

$$a_{m+r} = a_{m+k+r}, \quad a_{m+r+1} = a_{m+k+r+1}, \quad \dots,$$

en un mot,

$$a_k = a_\nu,$$

pour

$$\lambda \equiv \nu \pmod{k}, \quad \lambda \leq m, \quad \nu \leq m.$$

A partir de l'indice m , les coefficients se répètent donc périodiquement de k en k ; en posant

$$a_m = b_0, \quad a_{m+1} = b_1, \quad \dots, \quad a_{m+k-1} = b_{k-1}.$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x)}{f(x)} &= a_0 + a_1 x + \dots \\ &\quad + a_{m-1} x^{m-1} + b_0 x^m + b_1 x^{m+1} + \dots \\ &\quad + b_{k-1} x^{m+k-1} + b_0 x^{m+k} + \dots \\ &\quad + b_{k-1} x^{m+2k-1} + b_0 x^{m+2k} + \dots \end{aligned}$$

ce qui coïncide bien avec (2).

La solution générale du problème proposé est donc

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{x^s} \left(G(x) + H(x) \frac{x^m}{1 - x^k} \right) \quad (s \geq 0, m \geq 1, k \geq 1),$$

où $G(x)$ et $H(x)$ désignent des polynômes de degrés $m-1$ et $k-1$ respectivement, dont les coefficients sont tous égaux à zéro, à $+1$ ou à -1 .