

A. VACQUANT

**Agrégation des sciences mathématiques
(concours de 1902). Solution de la question
de mathématiques spéciales**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 3
(1903), p. 31-38

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__31_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS
DE 1902). SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES
SPÉCIALES;**

PAR M. A. VACQUANT, *
Professeur au lycée de Nancy.

*Étant donnée la surface du second ordre S qui,
rapportée à un système de trois axes rectangulaires,
a pour équation*

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 2x = 0,$$

*on considère les deux coniques C et C' d'intersection
de cette surface par les plans xOy et xOz, et une
droite D située dans le plan yOz et passant par l'ori-
gine des coordonnées.*

*1° Trouver l'équation de tout plan P tel que, si M
est l'un de ses points d'intersection avec la conique C,
M' l'un de ses points d'intersection avec la conique C',
et N son point d'intersection avec la droite D, les trois
points M, M', N soient en ligne droite.*

2° Trouver l'enveloppe des plans P.

3° Trouver le lieu Σ des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe A de l'espace sur les plans P.

Montrer qu'il existe une infinité de plans Q, passant par A, qui coupent cette surface Σ suivant deux cercles.

Trouver l'enveloppe de ces plans Q et le lieu de la corde commune aux deux cercles.

4° Que deviennent les résultats précédents dans le cas particulier où la surface du second ordre S est un paraboloïde?

I. Les équations de la droite D étant

$$x = 0, \quad y - mz = 0,$$

considérons le plan défini par la droite D et la droite MM'N ou Δ ; l'équation de ce plan est de la forme

$$y - mz - zx = 0.$$

Les équations de la conique C sont

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2x = 0.$$

Le plan (D, Δ) coupe cette conique C au point O et au point M dont les coordonnées x_1, y_1 se déduisent des équations précédentes

$$x_1 = \frac{2ab}{b + ax^2}, \quad y_1 = \frac{2abx}{b + ax^2}.$$

Les équations de la conique C' étant

$$x = 0, \quad \frac{x^2}{a} + \frac{z^2}{c} - 2x = 0,$$

les coordonnées x_2, z_2 du point M' seront

$$x_2 = \frac{2acm^2}{cm^2 + ax^2}, \quad z_2 = \frac{-2acmx}{cm^2 + ax^2}.$$

Si

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

est l'équation d'un plan P, en exprimant que les points M et M' sont dans ce plan, on a les deux conditions

$$(1) \quad 2abu + 2abxv + b + ax^2 = 0,$$

$$(2) \quad 2acm^2u - 3acmxw + cm^2 + ax^2 = 0.$$

En tirant de ces équations v et w , l'équation d'un plan P s'écrit

$$ux - \frac{2abu + b + ax^2}{2abx}y + \frac{2acm^2u + cm^2 + ax^2}{2acmx}z + 1 = 0$$

ou

$$2abcmxux - cm(2abu + b + ax^2)y + b(2acm^2u + cm^2 + ax^2)z + 2abcmx = 0$$

ou encore

$$(3) \quad \begin{cases} 2abcmu(ax - y + mz) \\ - cm(b + ax^2)y + b(cm^2 + ax^2)z + 2abcmx = 0. \end{cases}$$

Elle renferme deux paramètres u et x .

II. Cherchons d'abord l'enveloppe des plans P en coordonnées ponctuelles. Il suffit d'éliminer u et x entre l'équation (3) et ses dérivées par rapport à u et x , savoir

$$(3)' \quad ax - y + mz = 0.$$

$$(3)'' \quad 2abcmu - 2acmx - 2abxz + 2abcm = 0,$$

En tenant compte de (3)' l'équation (3) ne renfermera plus le paramètre u ; elle devient

$$ax^2(bz - cmx) + 2abcmx + bcm(mz - y) = 0.$$

Remplaçant dans cette équation x par sa valeur tirée

de l'équation (3)', on obtient l'enveloppe demandée

$$\frac{a}{x^2} (y - mz)^2 (bz - cmy) + 2abcm \frac{(y - mz)}{x} + bcm(mz - y) = 0,$$

qui se décompose dans le plan

$$y - mz = 0,$$

c'est-à-dire le plan xOD qui contient l'infinité des droites Δ qui passent par le deuxième point commun O' aux coniques C et C' , et l'hyperboloïde H

$$a(y - mz)(bz - cmy) + 2abcmx - bcmx^2 = 0$$

ou

$$(4) \quad a(y - mz)(cmy - bz) + bcmx(x - 2a) = 0.$$

On voit les deux systèmes de génératrices de cet hyperboloïde; il passe par les coniques C , C' et la droite D ; c'est donc l'hyperboloïde engendré par les droites Δ s'appuyant sur les coniques C , C' et la droite D . D'ailleurs on pouvait remarquer tout d'abord que les droites $MM'N$ ou Δ engendraient un hyperboloïde H , et que tout plan P passant par Δ était tangent à H ; de là un autre procédé de calcul pour résoudre les deux premières parties de la question : on considère le faisceau des quadriques passant par les coniques C et C' ; il a pour équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 2x + \lambda yz = 0,$$

et l'on prend λ de façon que cette équation représente une quadrique passant par la droite D ; on obtient ainsi l'hyperboloïde (4). Le système des génératrices Δ est

représenté par les équations

$$\begin{aligned} y - mz &= \alpha x \\ \alpha \alpha (cm y - b z) &= b c m (2a - x) \end{aligned}$$

et tout plan P, passant par Δ , a une équation de la forme

$$\beta(\alpha x - y + mz) + \alpha \alpha (cm y - b z) - b c m (2a - x) = 0$$

renfermant deux paramètres α et β .

Pour trouver l'équation de l'enveloppe du plan P en coordonnées tangentielles, il suffit d'éliminer α entre les équations (1) et (2); pour cela, éliminons successivement αx^2 et u entre ces équations; on obtient

$$(1)' \quad (b - cm^2)(2au + 1) + 2\alpha \alpha (bv + cmw) = 0$$

et

$$-2abcm^2\alpha v - 2abcm\alpha w + \alpha x^2(b - cm^2) = 0$$

ou

$$(2)' \quad -2bcm(mv + w) + \alpha(b - cm^2) = 0.$$

L'élimination de α entre (1)' et (2)' donne l'équation cherchée

$$(4)' \quad 4abcm(mv + w)(bv + cmw) + (b - cm^2)^2(2au + 1) = 0.$$

III. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A et

$$ux + vy + wz + h = 0$$

l'équation d'un plan P dont les coordonnées homogènes sont u, v, w, h . On trouvera l'équation ponctuelle du lieu Σ des pieds E des perpendiculaires issues de A aux plans P en éliminant u, v, w, h entre les équations

$$\begin{aligned} \frac{x - x_0}{u} &= \frac{y - y_0}{v} \\ &= \frac{z - z_0}{w} = \frac{x(x - x_0) + y(y - y_0) + z(z - z_0)}{-h}, \end{aligned}$$

$$4abcm(mv + w)(bv + cmw) + (b - cm^2)^2(2auh + h^2) = 0.$$

Pour cela on remplace dans la dernière équation u , v , w , h par des quantités proportionnelles $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, $x(x - x_0) + y(y - y_0) + z(z - z_0)$ et l'on a

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4abc m [m(y - y_0) + z - z_0] [b(y - y_0) + cm(z - z_0)] \\ + (b - cm^2)^2 [x(x - x_0) + y(y - y_0) + z(z - z_0)] \\ \times [2a(x - x_0) + x(x - x_0) + y(y - y_0) + z(z - z_0)] = 0. \end{array} \right.$$

Cette surface Σ est du quatrième ordre, bicirculaire; elle admet A pour point double : c'est aussi une surface anallagmatique. Ces résultats sont connus, car la surface Σ étant la podaire de l'hyperboloïde H est aussi l'inverse de la quadrique polaire réciproque de H par rapport à une sphère de centre A. Le cône des tangentes au point double A est le cône supplémentaire du cône circonscrit à H de sommet A.

Il existe une infinité de plans Q, passant par A, et coupant la surface Σ suivant deux cercles. Pour le voir, considérons les plans P passant par une droite Δ ; pour ces plans, le lieu de E est un cercle de centre ω , de diamètre AB, en désignant par B le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur Δ ; le plan Q de ce cercle est le plan mené par A perpendiculairement à Δ . En considérant la génératrice Δ' de l'hyperboloïde H parallèle à Δ , on a, dans le même plan Q, un cercle de centre ω' de diamètre AB', le point B' étant le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur Δ' . Donc tout plan Q qui passe par A et qui est perpendiculaire à une génératrice Δ ou Δ' de H coupe Σ suivant deux cercles.

Une génératrice Δ de H étant parallèle à une génératrice du cône asymptote Γ de H, les plans Q perpendiculaires aux génératrices du cône Γ envelopperont le cône Γ' supplémentaire de Γ et de sommet A.

La corde commune AA' aux deux cercles ω et ω' situés dans un plan Q est perpendiculaire à la ligne des centres $\omega\omega'$ et par suite à la droite BB' parallèle à $\omega\omega'$; mais les deux plans BAB' ou Q et (Δ, Δ') étant perpendiculaires, comme AA' est perpendiculaire à leur intersection BB' , AA' est aussi perpendiculaire au plan (Δ, Δ') qui est tangent au cône asymptote Γ de H ; donc le lieu de AA' est le cône Γ' supplémentaire de Γ , de sommet A , enveloppé par les plans Q ; de plus, un plan Q touche le cône Γ' le long de la corde AA' située dans ce plan Q .

IV. Dans le cas particulier où la surface du second ordre S est un parabolôïde S_1 représenté par l'équation

$$\frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 2x = 0,$$

il suffit de supposer $\frac{1}{a} = 0$, ou $a = \infty$, et de voir ce que deviennent les équations trouvées dans le cas précédent. L'équation (3) du plan P devient

$$(P) \quad 2bcmu(x - y + mz) - cm^2y + b^2z + 2bcmx = 0.$$

L'enveloppe de ce plan est le parabolôïde hyperbolique η ayant pour équation en coordonnées ponctuelles

$$(\eta) \quad (y - mz)(cm y - b z) - 2bcmx = 0,$$

et en coordonnées tangentielles

$$(\eta)' \quad 2bcm(mv + w)(bv + cmv) + (b - cm^2)^2 uh = 0.$$

La surface podaire Σ_1 de ce parabolôïde relative au point A est du troisième ordre; c'est un cyclide cubique ayant pour équation

$$(\Sigma_1) \quad \begin{cases} 2bcm[m(y - y_0) + z - z_0][b(y - y_0) + cm(z - z_0)] \\ + (b - cm^2)^2(x - x_0)[x(x - x_0) + y(y - y_0) + z(z - z_0)] = 0. \end{cases}$$

Le cône asymptote de l'hyperboloïde H est remplacé par l'ensemble des plans directeurs ϖ_1 et ϖ_2 du paraboloides η . Les plans Q deviennent des plans passant par A et perpendiculaires à l'un ou l'autre des plans directeurs de η . Un plan Q , perpendiculaire à un plan directeur, coupe Σ_1 suivant un cercle et une droite, issue de A , perpendiculaire à ce plan directeur.

En effet, une droite $MM'N$ ou Δ reste parallèle au plan directeur ϖ_1 ayant pour équation

$$cm\gamma - bz = 0.$$

Considérons, comme précédemment, les plans P passant par Δ ; le lieu des pieds E des perpendiculaires issues de A à ces plans P est le cercle de centre ω , de diamètre AB , en désignant par B le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur Δ ; le plan Q de ce cercle est le plan mené par A perpendiculairement à Δ ; le plan Q est perpendiculaire au plan ϖ_1 parallèle à Δ et il contient la perpendiculaire AA' à ϖ_1 ; cette perpendiculaire AA' appartient à Σ_1 comme on le voit en supposant que la droite Δ s'éloigne à l'infini; le diamètre AB du cercle ω devient infini et ce cercle devient la droite AA' .

Si l'on considère ensuite les génératrices Δ' du paraboloides η parallèles au plan directeur ϖ_2 ($\gamma - mz = 0$), on voit, de la même manière, qu'un plan Q perpendiculaire à ϖ_2 coupe Σ_1 suivant un cercle et une droite AA'' , issue de A et perpendiculaire à ϖ_2 .

Enfin l'enveloppe des plans Q qui passent par les droites AA' ou AA'' se compose de ces deux droites; on peut dire aussi que ces droites remplacent les cordes communes aux cercles ω et ω' du cas précédent.

On peut ajouter que l'existence de ces plans Q et leurs propriétés se voient sur l'équation (Σ_1).
