

PHILBERT DU PLESSIS

**Concours d'admission à l'École
polytechnique en 1903. Composition
de mathématiques**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 3
(1903), p. 314-322

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__314_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1903.
COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.**

SOLUTION PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

Deux points P, P₁, rapportés à un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, ont pour coordonnées a, b, c et a₁, b₁, c₁. De ces points partent respectivement deux droites [D] et [D₁] ayant pour cosinus directeurs α, β, γ et $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. L'axe des z est vertical.

Deux points pesants, placés d'abord en P et P₁, sont abandonnés à eux-mêmes, au même instant, et descendent sur les droites [D] et [D₁], sur lesquelles ils occupent, au bout du temps t, les positions M et M₁.

I. *Exprimer les coordonnées des points M et M₁ en fonction du temps.*

Les masses des deux points étant μ et μ_1 , déterminer le mouvement de leur centre de gravité G.

En supposant $c_1 = c$, $\gamma_1 = \gamma$, trouver à quelles conditions doivent satisfaire $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$, et quelle doit être la valeur du rapport $\frac{\mu}{\mu_1}$ pour que G décrive une droite verticale.

II. *Ces dernières conditions étant remplies, former l'équation de la surface-lieu de la droite MM₁, quand le temps varie.*

Mettre en évidence les génératrices rectilignes de cette surface.

Calculer les coordonnées de son sommet.

III. *Le mètre étant pris pour unité de longueur, on*

suppose que l'on ait

$$\begin{aligned} a = b = 0, \quad c = 1, \quad a_1 = 0, \quad b_1 = 2, \quad c_1 = 1, \\ \alpha = \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta = 0, \quad \alpha_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dans ce cas particulier, calculer le rapport $\frac{\mu}{\mu_1}$, de telle sorte que G parcoure une droite verticale : calculer, en outre, sa vitesse v à l'instant où il vient rencontrer l'axe des y , ainsi que la durée t de sa chute jusqu'à cet instant. Ces valeurs seront calculées en secondes pour le temps, en mètres à la seconde pour la vitesse, en prenant 9,8 pour valeur de l'accélération due à la pesanteur.

N. B. — Il est bien entendu qu'on ne tient aucun compte du frottement, ni de la résistance de l'air dans le mouvement des points M et M₁.

SOLUTION ANALYTIQUE.

I. On sait, d'après la théorie du plan incliné, que chacun des points M et M₁ décrit la droite correspondante d'un mouvement uniformément varié dont l'accélération est égale à la projection de l'accélération de la pesanteur sur cette droite.

Si donc on suppose l'axe Oz dirigé du bas vers le haut, l'accélération du point M sur la droite D est égale à $-g\gamma$, et ses projections sur les trois axes sont respectivement

$$-g\alpha\gamma, \quad -g\beta\gamma, \quad -g\gamma^2,$$

ce qui donne immédiatement, pour les coordonnées du point M au bout du temps t ,

$$(1) \quad \begin{cases} x = a - \frac{1}{2} g \alpha \gamma t^2, \\ y = b - \frac{1}{2} g \beta \gamma t^2, \\ z = c - \frac{1}{2} g \gamma^2 t^2 \end{cases}$$

et, de même pour le point M_1 ,

$$(1') \quad \begin{cases} x = a_1 - \frac{1}{2} g \alpha_1 \gamma_1 t^2, \\ y = b_1 - \frac{1}{2} g \beta_1 \gamma_1 t^2, \\ z = c_1 - \frac{1}{2} g \gamma_1^2 t^2. \end{cases}$$

Les coordonnées du centre de gravité G , égales, comme on sait, à

$$X = \frac{\mu x + \mu_1 x_1}{\mu + \mu_1}, \quad Y = \frac{\mu y + \mu_1 y_1}{\mu + \mu_1}, \quad Z = \frac{\mu z + \mu_1 z_1}{\mu + \mu_1},$$

sont donc données par

$$(2) \quad \begin{cases} X = \frac{\mu a + \mu_1 a_1}{\mu + \mu_1} - \frac{1}{2} g \frac{\mu \alpha \gamma + \mu_1 \alpha_1 \gamma_1}{\mu + \mu_1} t^2, \\ Y = \frac{\mu b + \mu_1 b_1}{\mu + \mu_1} - \frac{1}{2} g \frac{\mu \beta \gamma + \mu_1 \beta_1 \gamma_1}{\mu + \mu_1} t^2, \\ Z = \frac{\mu c + \mu_1 c_1}{\mu + \mu_1} - \frac{1}{2} g \frac{\mu \gamma^2 + \mu_1 \gamma_1^2}{\mu + \mu_1} t^2, \end{cases}$$

équations de même forme que les précédentes, qui définissent par suite aussi un mouvement rectiligne uniformément varié.

La droite décrite par le point G sera, d'ailleurs, verticale si X et Y sont indépendants de t , c'est-à-dire si

$$\mu \alpha \gamma + \mu_1 \alpha_1 \gamma_1 = 0,$$

$$\mu \beta \gamma + \mu_1 \beta_1 \gamma_1 = 0.$$

Dans l'hypothèse où $\gamma = \gamma_1$, ces égalités peuvent s'écrire

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} = -\frac{\mu_1}{\mu},$$

et, puisque les égalités

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$$

donnent ici

$$\alpha^2 + \beta^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2,$$

on a

$$-\frac{\mu_1}{\mu} = \frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha_1^2 + \beta_1^2}} = \pm 1.$$

Or, les masses μ et μ_1 étant essentiellement positives, la valeur -1 seule convient. On a donc finalement

$$(3) \quad \alpha = -\alpha_1, \quad \beta = -\beta_1, \quad \mu = \mu_1.$$

En d'autres termes, les droites D et D_1 également inclinées sur Oxy le sont en sens contraire, leurs projections sur ce plan étant parallèles, et les masses des points M et M_1 sont égales.

Si, en outre, on tient compte de l'égalité $c = c_1$, on voit que les coordonnées du point G se réduisent alors à

$$X = \frac{a + a_1}{2}, \quad Y = \frac{b + b_1}{2}, \quad Z = c - \frac{1}{2} g \gamma^2 t^2.$$

II. Si, dans les équations de la droite MM_1 ,

$$\frac{X - x}{x - x_1} = \frac{Y - y}{y - y_1} = \frac{Z - z}{z - z_1},$$

on remplace x, y, z, x_1, y_1, z_1 par leurs valeurs (en tenant compte des hypothèses $c = c_1, \gamma = \gamma_1$), et si l'on pose $\frac{1}{2} g \gamma^2 t^2 = \theta$, on a

$$\frac{X - a + \theta \alpha}{a - a_1 - 2\theta \alpha} = \frac{Y - b + \theta \beta}{b - b_1 - 2\theta \beta}, \quad Z = c - \theta \gamma.$$

Éliminant θ entre ces équations, on a, pour la surface décrite par la droite MM_1 , l'équation

$$\frac{\gamma(X - a) - \alpha(Z - c)}{\gamma(a - a_1) + 2\alpha(Z - c)} = \frac{\gamma(Y - b) - \beta(Z - c)}{\gamma(b - b_1) + 2\beta(Z - c)}$$

qu'on peut écrire

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2(Z - c) \left[\beta \left(X - \frac{a + a_1}{2} \right) - \alpha \left(Y - \frac{b + b_1}{2} \right) \right] \\ \quad + \gamma \left[(b - b_1) \left(X - \frac{a + a_1}{2} \right) \right. \\ \quad \quad \left. - (a - a_1) \left(Y - \frac{b + b_1}{2} \right) \right] = 0. \end{array} \right.$$

Cette équation définit un paraboloïde hyperbolique. On voit immédiatement qu'elle se simplifie beaucoup lorsqu'on transporte l'origine au point $\left(\frac{a + a_1}{2}, \frac{b + b_1}{2}, c \right)$, centre de gravité des points P et P₁. Elle devient alors ({ bis) $2Z'(\beta X' - \alpha Y') + \gamma[(b - b_1)X' - (a - a_1)Y'] = 0$.

Les plans directeurs de ce paraboloïde sont

$$Z' = 0, \quad \beta X' - \alpha Y' = 0,$$

et ses deux systèmes de génératrices rectilignes

$$(\lambda) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta X' - \alpha Y' = \lambda[(b - b_1)X' - (a - a_1)Y'], \\ 2\lambda Z' = -\gamma; \end{array} \right.$$

$$(\mu) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2Z' = \mu[(b - b_1)X' - (a - a_1)Y'], \\ \mu(\beta X' - \alpha Y') = -\gamma. \end{array} \right.$$

Les plans directeurs étant rectangulaires, le paraboloïde est équilatère, et son sommet est à la rencontre des deux génératrices respectivement perpendiculaires aux deux plans directeurs.

La génératrice (μ) perpendiculaire au plan $Z' = 0$ est celle pour laquelle $\mu = \infty$, c'est-à-dire

$$(5) \quad X' = 0, \quad Y' = 0,$$

et la génératrice (λ) perpendiculaire au plan

$$\beta X' - \alpha Y' = 0$$

est celle pour laquelle

$$[(b - b_1)\lambda - \beta]\beta + [(a - a_1)\lambda - \alpha]\alpha = 0;$$

d'où

$$\lambda = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta(b - b_1) + \alpha(a - a_1)},$$

ce qui, porté dans la seconde équation (λ), donne

$$(6) \quad Z' = -\frac{\gamma}{2} \frac{\alpha(a - a_1) + \beta(b - b_1)}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Le sommet étant défini, par rapport aux nouveaux axes, par les équations (5) et (6), ses coordonnées rapportées aux anciens seront

$$X = \frac{a + a_1}{2},$$

$$Y = \frac{b + b_1}{2},$$

$$Z = c - \frac{\gamma}{2} \frac{\alpha(a - a_1) + \beta(b - b_1)}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

III. Avec les données de l'énoncé, les formules (3), où l'on remplace par ρ le rapport $\frac{\mu}{\mu_1}$, deviennent

$$X = -\frac{2\rho - \sqrt{3}}{8(\rho + 1)}gt^2, \quad Y = \frac{2}{\rho + 1}, \quad Z = 1 - \frac{2\rho + 1}{8(\rho + 1)}gt^2.$$

Pour que le point défini par ces coordonnées décrive une verticale, il faut et il suffit que X soit indépendant de t (Y l'étant déjà), ce qui donne

$$2\rho = \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad \frac{\mu}{\mu_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On a, dès lors,

$$Z = 1 - \frac{\sqrt{3} + 1}{4(\sqrt{3} + 2)}gt^2.$$

(320)

Lorsque le point rencontre l'axe Oy , son Z est nul, et le temps de la chute est, dès lors, donné par

$$1 - \frac{\sqrt{3} + 1}{4(\sqrt{3} + 2)} \times 9,8 t^2 = 0;$$

d'où

$$t = 2 \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{9,8(1 + \sqrt{3})}}$$

ou, en multipliant haut et bas sous le radical par $\sqrt{3} - 1$,

$$t = \sqrt{\frac{2(1 + \sqrt{3})}{9,8}} = 0^s,746.$$

Si nous représentons le mouvement vertical du point par l'équation

$$Z = 1 - \frac{g' t^2}{2}$$

(où $g' = \frac{\sqrt{3} + 1}{2(\sqrt{3} + 2)} g$), nous venons de trouver, pour le temps de la chute,

$$t = \sqrt{\frac{2}{g'}}.$$

D'autre part, la vitesse est donnée en valeur absolue par

$$v = g' t.$$

On a donc, pour la vitesse à l'instant considéré,

$$v = g' \sqrt{\frac{2}{g'}} = \sqrt{2 g'}$$

et, par suite,

$$vt = 2.$$

Donc

$$v = \frac{2}{t} = \frac{2}{0,746} = 2^m,678.$$

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

I. Les segments parcourus dans le même temps par M et M_1 sur les droites D et D_1 à partir des points P et P_1 sont proportionnels aux projections de l'accélération g sur ces droites. Ces points engendrent donc des ponctuelles semblables, et la droite qui les joint décrit un paraboloïde hyperbolique. Comme, d'autre part, le centre de gravité G divise le segment MM_1 dans un rapport constant (inverse de celui des masses μ et μ_1), il décrit une génératrice Δ de ce paraboloïde, de même système que D et D_1 , et, de plus, il engendre sur cette génératrice une ponctuelle semblable aux ponctuelles (M) et (M_1) . Le mouvement de G est donc rectiligne et uniformément varié.

Si Δ est verticale, le plan directeur correspondant est vertical, et les droites D et D_1 étant alors parallèles à un même plan vertical ont leurs projections horizontales parallèles. Leurs inclinaisons supposées égales ($\gamma = \gamma_1$) doivent être de sens contraire, sans quoi le paraboloïde se réduirait au plan des deux droites parallèles qu'on obtiendrait alors, et Δ ne saurait être verticale tant que D et D_1 ne le seraient pas.

Sur ces droites inclinées, M et M_1 parcourent des segments égaux entre eux dans le même temps. Donc, la projection horizontale de MM_1 passe par un point fixe, milieu de la projection horizontale de PP_1 , et le centre de gravité G ne peut décrire une verticale qu'autant qu'il se projette horizontalement en ce point fixe, ce qui exige que G soit au milieu de MM_1 , c'est-à-dire que $\mu = \mu_1$.

II. Lorsque, en outre, $c = c_1$, c'est-à-dire lorsque les points de départ P et P_1 sont au même niveau, la

droite MM_1 reste constamment horizontale et engendre, par suite, en s'appuyant sur D et D_1 , un parabolôïde hyperbolique dont un plan directeur est horizontal, l'autre étant parallèle à D et D_1 , par suite vertical. Ce parabolôïde est donc équilatère.

Les génératrices du premier système, qui ne sont autres que les droites MM_1 , rencontrent toutes, comme nous venons de le voir, la verticale Δ décrite par G .

Les génératrices du second système, parallèles au second plan directeur, rencontrent toutes la perpendiculaire commune π à D et D_1 , qui est évidemment une génératrice du premier système, puisque horizontale.

Les génératrices Δ et π respectivement perpendiculaires aux deux plans directeurs déterminent un plan tangent perpendiculaire à l'axe, celui-ci étant parallèle à l'intersection des plans directeurs. Leur point de rencontre, milieu de la perpendiculaire commune à D et D_1 , n'est donc autre que le sommet du parabolôïde.