

J. SIRE

Sur la multiplication par 5 d'une période de la fonction $\wp$

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 3
(1903), p. 297-302

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__297_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[F5a α]

**SUR LA MULTIPLICATION PAR 5 D'UNE PÉRIODE
DE LA FONCTION pu ;**

PAR M. J. SIRE, à Nancy.

On sait que si

$$z = p\left(u \left| \omega, \frac{\omega'}{5} \right.\right)$$

est donné,

$$x = p(u \mid \omega, \omega')$$

s'obtient par la résolution d'une équation du cinquième degré. En effet, si l'on regarde z comme une fonction elliptique aux périodes $2\omega, 2\omega'$, la formule de décomposition en éléments simples donne

$$\begin{aligned} z = c + pu + & \left[p\left(u - \frac{2\omega'}{5}\right) + p\left(u + \frac{2\omega'}{5}\right) \right] \\ & + \left[p\left(u - \frac{4\omega'}{5}\right) + p\left(u + \frac{4\omega'}{5}\right) \right]; \end{aligned}$$

la constante c étant définie par l'équation

$$c + 2p\left(\frac{2\omega'}{5}\right) + 2p\left(\frac{4\omega'}{5}\right) = 0.$$

Si l'on applique à chacune des parenthèses la formule

$$p(u + v) + p(u - v) = \frac{2(pu p v - \frac{1}{2}g_2)(pu + pv) - g_3}{(pu - pv)^2},$$

et si l'on pose

$$a = p\left(\frac{2\omega'}{5}\right), \quad b = p\left(\frac{4\omega'}{5}\right),$$

il vient

$$z = x - 2a - 2b + \frac{2(ax - \frac{1}{2}g_2)(x + a) - g_3}{(x - a)^2} \\ + \frac{2(bx - \frac{1}{2}g_2)(x + b) - g_3}{(x - b)^2},$$

équation du cinquième degré en x qui admet pour racines

$$pu, \quad p\left(u - \frac{2\omega'}{5}\right), \quad p\left(u - \frac{4\omega'}{5}\right), \\ p\left(u - \frac{6\omega'}{5}\right), \quad p\left(u - \frac{8\omega'}{5}\right).$$

Je me propose de trouver une expression simple de la fonction cyclique de ces racines :

$$\psi(u) = pu + \alpha p\left(u - \frac{2\omega'}{5}\right) + \alpha^2 p\left(u - \frac{4\omega'}{5}\right) \\ + \alpha^3 p\left(u - \frac{6\omega'}{5}\right) + \alpha^4 p\left(u - \frac{8\omega'}{5}\right),$$

où $\alpha = e^{\frac{2i\pi r}{5}}$, r désignant un nombre entier non multiple de 5. Je considère à cet effet la fonction

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_1(u) = -\zeta u - \alpha \zeta\left(u - \frac{2\omega'}{5}\right) - \alpha^2 \zeta\left(u - \frac{4\omega'}{5}\right) \\ \quad \quad \quad - \alpha^3 \zeta\left(u - \frac{6\omega'}{5}\right) - \alpha^4 \zeta\left(u - \frac{8\omega'}{5}\right), \end{array} \right.$$

qui admet pour dérivée $\psi(u)$; si, dans cette fonction, je remplace u par $u + \frac{2\omega'}{5}$, j'obtiens

$$(2) \quad \Psi_1\left(u + \frac{2\omega'}{5}\right) = \alpha \Psi_1(u) - 2\eta',$$

en remarquant que

$$\zeta\left(u + \frac{2\omega'}{5}\right) = \zeta\left(u - \frac{8\omega'}{5}\right) + 2\eta'.$$

Posant

$$\Psi_1(u) = \Psi(u) - h,$$

il vient, en tenant compte de (2),

$$\Psi\left(u + \frac{2\omega'}{5}\right) = \alpha \Psi(u) + h(1 - \alpha) - 2\eta'.$$

Si la constante h est déterminée de telle façon que

$$h = \frac{2\eta'}{1 - \alpha},$$

il en résulte

$$(3) \quad \Psi\left(u + \frac{2\omega'}{5}\right) = \alpha \Psi(u)$$

$\left(\alpha = e^{\frac{2i\pi r}{5}}, r \text{ non multiple de } 5\right)$. D'ailleurs

$$(4) \quad \Psi(u + 2\omega) = \Psi(u);$$

ceci résulte de ce que la somme $(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4)$ des résidus qui figurent dans (1) est nulle.

Les relations (3) et (4) montrent que $\Psi(u)$ est dans le premier parallélogramme des périodes $2\omega, \frac{2\omega'}{5}$, une fonction à multiplicateurs constants 1 et α ; elle admet dans ce parallélogramme comme pôle simple de résidu -1 le point $u = 0$, puisque $\Psi_1(u)$ possède, d'après (1), dans le premier parallélogramme des périodes $2\omega, 2\omega'$, comme pôles simples de résidu -1 , les points $u = 2k\frac{\omega'}{5}$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$); on a donc

$$(5) \quad \Psi(u) = e^{\rho u} \frac{\sigma(u - \nu)}{\sigma u \sigma \nu},$$

ρ et ν désignant des constantes que je vais déterminer.

Pour rendre le calcul plus clair, je poserai $\frac{\omega'}{5} = \omega'_1$ et je désignerai par η'_1 ce que devient η' quand on remplace ω' par ω'_1 ; utilisant des formules bien connues relatives à $\sigma(u | \omega, \omega'_1)$ on a

$$\begin{aligned}\Psi(u + 2\omega) &= e^{2(\rho\omega - \eta\nu)} \Psi(u), \\ \Psi(u + 2\omega'_1) &= e^{2(\rho\omega'_1 - \eta'_1\nu)} \Psi(u);\end{aligned}$$

pour que la fonction $e^{\rho u} \frac{\sigma(u - \nu)}{\sigma u \sigma \nu}$ admette les multiplicateurs 1 et α , il suffira de poser

$$\begin{aligned}\rho\omega - \eta\nu &= 0, \\ \rho\omega'_1 - \eta'_1\nu &= \frac{\pi i r}{5},\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\nu = \frac{2r\omega}{5}, \quad \rho = \frac{2r\eta}{5},$$

en remarquant que

$$\eta\omega'_1 - \eta'_1\omega = \frac{\pi i}{2}.$$

On a donc finalement

$$\Psi(u) = e^{\frac{2\eta u}{5}} \frac{\sigma\left(u - 2\frac{r\omega}{5}\right)}{\sigma u \sigma\left(\frac{2r\omega}{5}\right)}.$$

Cette relation permet de se rendre compte que $\Psi^5(u)$ admet les périodes $2\omega, 2\omega'_1$; comme cette fonction admet l'origine comme pôle d'ordre 5, on a donc

$$\Psi^5(u) = a_0 + a_1 p u + a_2 p' u + a_3 p'' u + a_4 p''' u,$$

où $p u$, comme dans ce qui suivra, est la fonction construite avec les périodes $2\omega, 2\omega'_1$. En remarquant que $\Psi^5(u)$ s'annule pour $u = \nu$ ($\nu = \frac{2r\omega}{5}$), ainsi que

ses quatre premières dérivées, on en déduit avec M. Kiépert,

$$\Psi^5(u) = C \begin{vmatrix} pu - p\nu & p'u - p'\nu & p''u - p''\nu & p'''u - p'''\nu \\ p'\nu & p''\nu & p'''\nu & p^{iv}\nu \\ p''\nu & p'''\nu & p^{iv}\nu & p^v\nu \\ p'''\nu & p^{iv}\nu & p^v\nu & p^{vi}\nu \end{vmatrix},$$

C étant une constante qui se détermine en cherchant la limite de $[u \Psi(u)]^5$ pour $u = 0$.

Dérivant, il vient

$$5 \Psi^4(u) \Psi'(u) = C \begin{vmatrix} p'u & p''u & p'''u & p^{iv}u \\ p'\nu & p''\nu & p'''\nu & p^{iv}\nu \\ p''\nu & p'''\nu & p^{iv}\nu & p^v\nu \\ p'''\nu & p^{iv}\nu & p^v\nu & p^{vi}\nu \end{vmatrix},$$

et, puisque $\Psi'(u) = \psi(u)$, j'ai ainsi obtenu l'expression de $\psi(u)$ que je me proposais de retrouver. On peut en conclure facilement que l'équation du cinquième degré en $x = p(u | \omega, \omega')$ est résoluble par radicaux, quand en même temps que $z = p(u | \omega, \omega'_1)$ on donne la dérivée $p'(u | \omega, \omega'_1)$, les racines 5^{ièmes} de l'unité et les invariants de la fonction $p(u | \omega, \omega'_1)$.

Le problème que je viens d'examiner n'est qu'un cas très particulier du problème traité par M. Kiépert dans un Mémoire publié dans le *Journal de Crelle*, t. 76. L'auteur, pour calculer les n valeurs de $p(u | \omega, \omega')$ qui correspondent à $p\left(u \middle| \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$, part de la fonction

$$f(u) = e^{\rho u} \frac{\sigma(u - \nu)}{\sigma u \sigma \nu},$$

où

$$\nu = \frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n},$$

$$\rho = \frac{2\lambda\eta + 2\mu\eta'}{n},$$

λ et μ désignant des entiers, sans indiquer comment il a été amené à considérer cette fonction. La méthode que j'ai suivie, dans le cas où $n = 5$, montre suffisamment de quelle manière on peut introduire la fonction $f(u)$.