

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 3
(1903), p. 284-288

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__284_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1829.

(1899, p. 335.)

On donne une conique (S) et un triangle ABC conjugué par rapport à cette conique.

Soient m un point de la courbe et (ε) une conique tangente à (S) au point m et circonscrite à ABC; on demande le lieu du point d'intersection de la tangente commune au point m avec la seconde corde commune aux courbes (S) et (ε).

Résoudre la même question en supposant que la conique (S) est inscrite dans le triangle ABC.

(E. GENTY.)

SOLUTION

Par M. A.-H. COUVERT.

1^o Prenons ABC pour triangle de référence; l'équation de (S) est

$$l^2 x^2 + m^2 y^2 = n^2 z^2.$$

Un point m de cette courbe peut être défini par le paramètre q et les relations

$$lx = ny \cos \varphi, \quad my = n z \sin \varphi;$$

la tangente en m est

$$(1) \quad lx \cos \varphi - my \sin \varphi = xz.$$

Une conique (ε) aura pour équation

$$l^2 x^2 + m^2 y^2 - n^2 z^2 + (lx \cos \varphi + my \sin \varphi - xz)(Ax + By + Cz) = 0.$$

Exprimant que cette courbe est circonscrite à ABC, on trouve

$$A = -\frac{l}{\cos \varphi}, \quad B = -\frac{m}{\sin \varphi}, \quad C = -n,$$

en sorte que la seconde sécante commune à (S) et (ε) est

$$(2) \quad \frac{lx}{\cos \varphi} + \frac{my}{\sin \varphi} + nz = 0.$$

L'élimination de y entre (1) et (2), donnera le lieu cherché.
De (1) et (2) on tire

$$\begin{aligned} \frac{lx}{-\cos \varphi (1 + \sin^2 \varphi)} &= \frac{my}{\sin \varphi (1 + \cos^2 \varphi)} \\ &= \frac{nz}{\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi} \\ &= \frac{-lx + my}{\sin \varphi + \cos \varphi + \sin \varphi \cos \varphi (\sin \varphi + \cos \varphi)} \\ &= \frac{lx + my}{\sin \varphi - \cos \varphi + \sin \varphi \cos \varphi (\sin \varphi - \cos \varphi)}. \end{aligned}$$

D'où :

$$(3) \quad \sin \varphi + \cos \varphi = M(1 - \sin \varphi \cos \varphi),$$

$$(4) \quad \sin \varphi - \cos \varphi = N(1 + \sin \varphi \cos \varphi),$$

en posant

$$M = \frac{nz}{lx + my}, \quad N = \frac{-nz}{-lx + my}.$$

En élevant (3) et (4) au carré et posant, pour abrégér, $\sin 2\varphi = u$, on a

$$\frac{M^2 u^2}{4} - (M^2 + 1)u + M^2 - 1 = 0,$$

$$\frac{N^2 u^2}{4} + (N^2 + 1)u + N^2 - 1 = 0.$$

L'élimination de u entre ces deux équations donne, après simplifications,

$$8(1 - M^2 N^2)(M^2 + N^2 + 2M^2 N^2) - (M^2 - N^2)^2 = 0$$

ou

$$\begin{aligned} -16M^4 N^4 - 8M^2 N^2(M^2 + N^2) \\ - M^4 - N^4 + 18M^2 N^2 + 8(M^2 + N^2) = 0. \end{aligned}$$

En remplaçant M et N par leurs valeurs, on trouve une

équation qui se met aisément sous la forme symétrique suivante :

$$(l^2x^2 + m^2y^2 + n^2z^2)(-l^2x^2 + m^2y^2 - n^2z^2) \\ \times (-l^2x^2 + m^2y^2 + n^2z^2) - l^2m^2n^2x^2y^2z^2 = 0.$$

Courbe du sixième degré.

2° Soit

$$p^2x^2 + q^2y^2 + r^2z^2 - 2qryz - 2rpzx - 2pqxy = 0$$

la conique (S) inscrite dans ABC. Un point de cette courbe peut être défini à l'aide du paramètre θ et des deux équations

$$px = rz \cos^4 \theta, \quad qy = rz \sin^4 \theta;$$

la tangente est

$$(5) \quad px \sin^2 \theta + qy \cos^2 \theta - rz \sin^2 \theta \cos^2 \theta = 0,$$

en sorte que la conique (ε) est

$$p^2x^2 + q^2y^2 + \dots - 2pqxy \\ + (px \sin^2 \theta + qy \cos^2 \theta - rz \sin^2 \theta \cos^2 \theta)(Ax + By + Cz) = 0.$$

Écrivant que les coefficients des termes en x^2 , y^2 , z^2 sont nuls, on trouve les valeurs de A, B, C, et la corde commune à pour équation

$$(6) \quad -\frac{px}{\sin^2 \theta} - \frac{qy}{\cos^2 \theta} + \frac{rz}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = 0.$$

L'élimination de θ entre (5) et (6) donnera le lieu dont les coordonnées sont d'ailleurs exprimables, comme celles du lieu précédent, en fonctions rationnelles d'un paramètre. De (5) et (6) on tire

$$\begin{aligned} & \frac{-px}{\cos^4 \theta (1 + \sin^2 \theta)} \\ &= \frac{qy}{\sin^4 \theta (1 + \cos^2 \theta)} \\ &= \frac{rz}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{qy + px}{(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)(1 + \sin^2 \theta \cos^2 \theta)} = \frac{qp - pz}{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \theta}; \end{aligned}$$

d'où

$$1 + \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{qy + px}{rz},$$

$$\sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{px + qy - rz}{rz}$$

et

$$(7) \quad \sin^2 2\theta = \frac{4(px + qy - rz)}{rz}.$$

D'ailleurs, on a aussi

$$\frac{rz}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta} = \frac{-px + qy}{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \frac{rz(-px + qy)}{2rz - px - qy};$$

d'où

$$(8) \quad \cos^2 2\theta = \frac{(-px - qy + 2rz)^2}{(px - qy)^2}.$$

De (7) et (8) on tire

$$\frac{(px + qy - 2rz)^2}{(px - qy)^2} + \frac{4(px + qy - rz)}{rz} = 1.$$

C'est l'équation du lieu; on voit que c'est une cubique; son équation se met aisément sous la forme

$$(px - qy + rz)(px + qy - rz) \\ \times (px - qy - rz) + pqrxyz = 0.$$

La courbe est tangente aux côtés du triangle.

1964.

(1903, p. 95.)

Rectifier la courbe déterminée par l'intersection de

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \text{et de} \quad \frac{z^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

(G. FLEURI.)

SOLUTION

Par M. C. ALASIA.

Pour abréger nous poserons

$$\frac{a^2}{a^2 + b^2} = p, \quad \frac{b^2}{a^2 + b^2} = q, \quad \frac{r^2}{b^2 + r^2} = u.$$

On a, alors

$$\begin{aligned} x &= [(r^2 - a^2) q \sin^2 \varphi]^{\frac{1}{2}}, \\ y &= [(r^2 - a^2) \cos^2 \varphi]^{\frac{1}{2}}, \\ z &= a \left[\left(q + \frac{r^2}{a^2 + b^2} \right) \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{dx^2}{d\varphi^2} &= (r^2 - a^2) q \cos^2 \varphi, \\ \frac{dy^2}{d\varphi^2} &= (r^2 - a^2) \sin^2 \varphi, \\ \frac{dz^2}{d\varphi^2} &= p \frac{(r^2 - a^2)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(a^2 + b^2) \cos^2 \varphi + (b^2 + r^2) \sin^2 \varphi}. \end{aligned}$$

On en conclut

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2}} \frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\frac{b^2 + r^2 \sin^2 \varphi}{(a^2 + b^2) + (r^2 - a^2) \sin^2 \varphi}}.$$

Posons

$$\tan^2 \varphi = \frac{b^2}{b^2 + r^2} \tan^2 \omega,$$

et l'intégration nous donnera

$$(1) \quad s = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sqrt{\frac{r^2 - a^2}{b^2 + r^2}} \int \frac{d\omega}{1 - u \sin^2 \omega} (1 - p \sin^2 \omega)^{-\frac{1}{2}}.$$

En posant $u = e^2$ et $p = \sin^2 \eta$, cette intégrale se réduit à la forme la plus simple de l'intégrale elliptique à paramètre circulaire.