

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 3
(1903), p. 188-191

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__188_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1549.

(1885, p. 498.)

Une ellipse de grandeur invariable (demi-axes a et b) se déplace de façon à rester tangente à une droite donnée en un point donné; démontrer que le lieu géométrique du centre de cette ellipse est une courbe fermée du quatrième degré, dont l'aire a pour expression $\frac{\pi}{2}(a-b)^2$.

(E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. A.-H. COUVERT.

Nous utiliserons des formules employées par M. Barisien pour une question analogue (voir *J. M. S.*, 1898, p. 158). Si θ désigne l'angle aigu que fait une tangente avec le grand axe d'une ellipse d'équation $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, l'équation de la tangente est

$$x \sin \theta + y \cos \theta = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$$

(189)

et celle de la normale est

$$x \cos \theta - y \sin \theta = \frac{c^2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}},$$

en sorte que les distances δ_c et Δ_c du centre à chacune de ces droites sont

$$\delta_c = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$$

et

$$\Delta_c = \frac{c^2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}.$$

Si donc l'ellipse d'axes $2a$, $2b$ se meut en restant tangente à l'axe des x à l'origine, les coordonnées du centre sont

$$(1) \quad x = \frac{c^2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}},$$

$$(2) \quad y = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}.$$

En outre

$$(3) \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1.$$

De (2) et (3) on tire

$$\sin^2 \theta = \frac{y^2 - b^2}{a^2 - b^2}, \quad \cos^2 \theta = \frac{y^2 - a^2}{b^2 - a^2}.$$

Mais (1) peut s'écrire

$$x^2 y^2 = (a^2 - b^2)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta = -(y^2 - a^2)(y^2 - b^2).$$

Le lieu est donc

$$x^2 y^2 + (y^2 - a^2)(y^2 - b^2) = 0.$$

C'est une quartique circulaire fermée.

L'aire A de cette courbe s'obtient aisément en considérant les équations (1) et (2),

$$dy = \frac{(a^2 - b^2) \sin \theta \cos \theta d\theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}},$$

$$A = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^2 - b^2)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}.$$

Prenant $\text{tang } \theta = t$ pour variable il vient

$$A = 2(a^2 - b^2)^2 \int_0^\infty \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2 (a^2 t^2 + b^2)}.$$

Or

$$\begin{aligned} & \frac{t^2}{(1+t^2)^2 (a^2 t^2 + b^2)} \\ &= \frac{-1}{a^2 - b^2} \frac{1}{(1+t^2)^2} + \frac{a^2}{(a^2 - b^2)^2} \frac{1}{1+t^2} \\ & \quad - \frac{a^2 b^2}{(a^2 - b^2)^2} \frac{1}{a^2 t^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$A = 2 \left((b^2 - a^2) \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^2} + a^2 \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} - ab \int_0^\infty \frac{d\left(\frac{at}{b}\right)}{1 + \left(\frac{at}{b}\right)^2} \right).$$

Remarquant que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^2} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} (\text{arc tang } t)_0^\infty = \frac{\pi}{4}, \\ \int_0^\infty \frac{d\left(\frac{at}{b}\right)}{1 + \left(\frac{at}{b}\right)^2} &= \left(\text{arc tang } \frac{at}{b} \right)_0^\infty = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

il vient

$$A = 2 \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \pi + \frac{a^2 \pi}{2} - \frac{ab \pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} (a - b)^2.$$

GÉNÉRALISATION DE LA QUESTION PROPOSÉE

Par M. E.-N. BARISIEN.

Glissette d'un point donné du plan de l'ellipse. — Soient α et β les coordonnées de ce point par rapport aux axes de symétrie de l'ellipse, on trouve pour les coordonnées de ce point par rapport aux axes de coordonnées Ox , Oy

$$\begin{aligned} X &= \alpha \cos \theta - \beta \sin \theta + \frac{c^2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}, \\ Y &= \alpha \sin \theta + \beta \cos \theta + \frac{c^2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}, \end{aligned}$$

(191)

et pour l'aire de l'une des deux ovales de la glissette

$$U = \frac{\pi}{2}(\alpha - b)^2 + \pi(\alpha^2 + \beta^2).$$

En particulier, pour le lieu de la *glissette des foyers* ($\alpha = \pm c, \beta = 0$), on a

$$U = \frac{\pi}{2}(\alpha - b)(3\alpha + b).$$

L'équation cartésienne de cette glissette est du sixième degré

$$X^2(Y^2 + b^2)^2 + Y^2(Y^2 - b^2)^2 = 4c^2Y^4$$

ou encore

$$X^2 = \frac{Y^2[(\alpha + c)^2 - Y^2][Y^2 - (\alpha - c)^2]}{(Y^2 + b^2)^2}.$$

L'aire de la podaire du point (α, β) par rapport à la développée de l'ellipse est

$$V = \frac{\pi}{2}(\alpha - b)^2 + \frac{\pi}{2}(\alpha^2 + \beta^2).$$

On a, par conséquent, la relation curieuse

$$V - \frac{U}{2} = \frac{\pi}{4}(\alpha - b)^2,$$

indépendante de la position du point (α, β) .

On a aussi pour l'aire de la podaire de l'ellipse par rapport au point (α, β) ,

$$W = \frac{\pi}{2}(\alpha^2 + b^2) + \frac{\pi}{2}(\alpha^2 + \beta^2),$$

avec la relation

$$W - \frac{U}{2} = \frac{\pi}{4}(\alpha + b)^2.$$
