

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 3
(1903), p. 141-143

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__141_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1951.

(1902, p. 576.)

Trouver les courbes telles que la distance de l'origine à la tangente soit proportionnelle à la normale limitée à l'axe.

(A. PELLET.)

SOLUTION

Par M. H. AMSTEIN.

Si les coordonnées sont rectangulaires, la distance de l'origine à la tangente au point (x, y) à une des courbes cherchées est donnée par l'expression

$$\frac{y - px}{\sqrt{1 + p^2}}$$

et la normale au même point par

$$y \sqrt{1 + p^2},$$

où

$$p = \frac{dy}{dx}.$$

L'équation différentielle des courbes demandées est ainsi

$$(1) \quad y - px = my(1 + p^2),$$

où m signifie un nombre réel quelconque.

Pour l'intégrer, on la différentie d'abord, ce qui donne

$$dy - p dx - x dp = m(1 + p^2) dy + 2mpy dp.$$

Afin de débarrasser cette dernière équation de la variable x , on y remplacera x par sa valeur tirée de (1), et dx par $\frac{dy}{p}$. Il vient, tous calculs faits,

$$\frac{dy}{y} = \frac{m-1-mp^2}{mp(1+p^2)} dp.$$

L'intégration de cette équation différentielle n'offre aucune difficulté, et l'on obtient immédiatement

$$\log \frac{y}{C} = \left(1 - \frac{1}{m}\right) \log p + \frac{1-2m}{m} \log(1+p^2).$$

d'où, en passant des logarithmes aux nombres,

$$(2) \quad y = Cp^{1-\frac{1}{m}}(1+p^2)^{\frac{1-2m}{2m}}.$$

La valeur correspondante de x est fournie par (1). Elle est

$$(3) \quad x = \frac{C(1+p^2)^{\frac{1-2m}{2m}}[1-m(1+p^2)]}{p^{\frac{1}{m}}}.$$

Les équations (2) et (3), dans leur ensemble, constituent l'intégrale générale de l'équation différentielle (1). Elles sont, en effet, une représentation paramétrique des courbes cherchées. En y substituant $p = \tan z$, elles prennent la forme

$$x = C \frac{\cos^2 z - m}{(\sin z)^{\frac{1}{m}}},$$

$$y = C (\sin z)^{1-\frac{1}{m}} \cos z.$$

Cas particuliers :

a. Pour $m = 1$ on obtient la circonférence

$$x = C \sin z,$$

$$y = C \cos z \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = C^2.$$

b. La valeur $m = -1$ conduit aux équations

$$x = C \sin z (1 + \cos^2 z),$$

$$y = C \sin^2 z \cos z$$

ou bien à l'équation unique qu'on en tire par l'élimination de α

$$(x^2 + y^2)^3 - C^2(x^4 + 20x^2y^2 + 8y^4) + 16C^4y^2 = 0.$$

La courbe du sixième degré représentée par cette équation a quatre points de rebroussement de première espèce dont les coordonnées sont respectivement

$$x = \pm \frac{4}{9}\sqrt{6}C, \quad y = \pm \frac{2}{9}\sqrt{3}C,$$

et les coefficients angulaires des tangentes en ces points sont respectivement

$$\tan \alpha = \pm \sqrt{2}.$$

c. Pour $m = \frac{1}{2}$ la courbe cherchée est la parabole

$$x = C \frac{\cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha},$$

$$y = C \cos \alpha = C \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}}$$

ou

$$y^2 = 2C \left(x + \frac{1}{2}C \right).$$

Autres solutions par MM. BARISIEN et COUVERT.
