

A. CAUSSÉ

**Solution de la question d'analyse proposée
en 1902 au concours d'agrégation des
sciences mathématiques**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 3
(1903), p. 115-127

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__115_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE PROPOSÉE EN 1902
AU CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉ-
MATIQUES;**

PAR M. A. CAUSSÉ.

Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy , on considère une courbe C telle que la tangente MT et la normale MN menées à cette courbe en un point M forment avec l'axe Ox un triangle MNT dont l'aire reste constante (et égale à la moitié de l'aire d'un carré de côté donné a) lorsque M décrit C .

1° Exprimer les coordonnées x et y , par rapport à Ox et Oy , d'un point M de la courbe C en fonction du coefficient angulaire t de la tangente en M ; construire la courbe.

2° Exprimer ensuite les coordonnées x et y considérées en fonction UNIFORME d'un paramètre à l'aide des fonctions introduites par Weierstrass dans la théorie des fonctions elliptiques.

3° Calculer en fonction de u le rayon de courbure

relatif au point M de la courbe C et examiner s'il s'exprime en fonction uniforme de u .

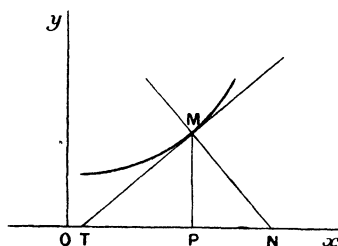
4° Démontrer que, si l'on désigne par M' le centre de courbure de la courbe C relatif au point M et par P la projection de M sur Ox , l'aire du triangle $M'NP$ ne varie pas avec le point M ; indiquer quelle est la valeur constante de cette aire.

5° Calculer en fonction de u la longueur de l'arc de la courbe C compris entre un point donné M_0 et le point M correspondant à la valeur u du paramètre.

6° Soit M un point de la courbe C correspondant à la valeur u du paramètre et situé du même côté de l'axe Ox qu'un point donné M_0 de cette courbe; on suppose de plus que l'arc de la courbe C qui joint M_0 et M n'est pas rencontré, entre M_0 et M , par les portions MP , M_0P_0 des ordonnées de M et de M_0 limitées à l'axe Ox ; calculer en fonction de u l'aire dont le contour est formé par la portion PP_0 de l'axe Ox , par les portions MP , M_0P_0 des ordonnées de M et de M_0 et par l'arc de la courbe C joignant les points M_0 et M .

1. Soit P la projection de M sur Ox (fig. 1); en pre-

Fig. 1.



nant les points de rencontre avec Ox de la tangente en M ,

$$Y - y = t(X - x),$$

et de la normale $Y - y = -\frac{1}{t}(X - x)$, on trouve

$$\overline{PT} = -\frac{y}{t}, \quad \overline{PN} = ty,$$

$$\overline{TN} = \overline{PN} - \overline{PT} = ty + \frac{y}{t} = y \frac{t^2 + 1}{t}.$$

On a

$$\text{aire TMN} = \frac{1}{2} \overline{TN} \times \overline{PM} = \pm \frac{y^2}{2} \frac{t^2 + 1}{t};$$

l'équation du problème est

$$\pm y^2 \frac{t^2 + 1}{t} = a^2.$$

On en déduit

$$\frac{y}{a} = \varepsilon \sqrt{\varepsilon' \frac{t}{t^2 + 1}}, \quad \frac{dy}{a} = \varepsilon \varepsilon' \frac{1 - t^2}{t^2 + 1} \frac{dt}{\sqrt{4 \varepsilon' t(t^2 + 1)}} \\ (\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1);$$

puis

$$dx = \frac{dy}{t}, \quad \frac{dx}{a} = \varepsilon \varepsilon' \frac{1 - t^2}{t(t^2 + 1)} \frac{dt}{\sqrt{4 \varepsilon' t(t^2 + 1)}}.$$

Premier cas : $\varepsilon = +1$, $\varepsilon' = +1$. — La réalité de x et y exige que t ne prenne que des valeurs positives.

Quand t augmente indéfiniment, $\frac{dx}{dt}$ tend vers 0 comme $\frac{1}{t^2}$; donc x a une limite; choisissons la constante d'intégration de sorte que cette valeur limite soit nulle

$$\frac{x}{a} = \int_{\infty}^t \frac{1 - t^2}{t(t^2 + 1)} \frac{dt}{\sqrt{4 t(t^2 + 1)}}.$$

Quand t tend vers 0, $\frac{dx}{dt}$ augmente indéfiniment comme $\frac{1}{t^2}$; donc x augmente indéfiniment.

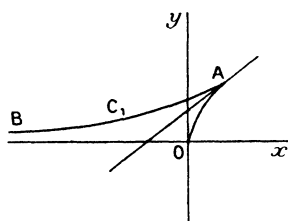
Voici le Tableau des variations de x et y quand t varie de $0 + \infty$:

$\frac{dy}{dx} = t \dots$	0		1		$+\infty$
$\frac{dy}{dt} \dots\dots\dots$	$+\infty$	+	0	-	0
$y \dots\dots\dots$	0	croît	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	décroît	0
$\frac{dx}{dt} \dots\dots\dots$	$+\infty$	+	0	-	0
$x \dots\dots\dots$	$-\infty$	croît	»	décroît	0

La branche de courbe représentative C_1 est asymptote à Ox et présente un rebroussement pour $t = 1$.

Les branches de courbe correspondant aux différentes valeurs de la constante d'intégration se déduisent de C_1 par des translations parallèles à Ox (fig. 2).

Fig. 2.



Deuxième cas : $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = +1$. — En choisissant encore la constante d'intégration de sorte que $x = 0$ pour $t = +\infty$, on trouve pour x et y des expressions égales et de signes contraires à celles du premier cas; donc la branche représentative C_2 est symétrique de C_1 par rapport à l'origine.

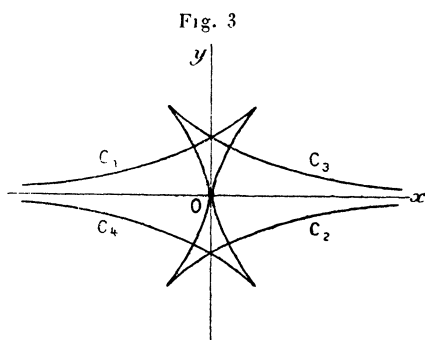
Troisième cas : $\varepsilon = +1$, $\varepsilon' = -1$. — La variable t ne peut prendre que des valeurs négatives; par un choix

convenable de la constante d'intégration, il vient

$$\frac{x}{a} = - \int_{-\infty}^t \frac{(1-t^2) dt}{t(1+t^2) \sqrt{-\frac{1}{4}t(t^2+1)}},$$

$$\frac{y}{a} = \sqrt{-\frac{t}{t^2+1}}.$$

Je dis que la branche représentative C_3 est symétrique de C_1 par rapport à Oy (*fig. 3*). En premier lieu, le



point M_1 de C_1 correspondant à $t = t_0$ et le point M_3 de C_3 correspondant à $t = -t_0$ ont la même ordonnée

$$\sqrt{\frac{t_0}{t_0^2 + 1}};$$

en second lieu, si l'on fait dans l'intégrale définie qui donne l'abscisse de M_3 ,

$$-a \int_{-\infty}^{-t_0} \frac{(1-t^2) dt}{t(1+t^2) \sqrt{-\frac{1}{4}t(t^2+1)}},$$

le changement de variable de t en $-t$, on obtient

$$-a \int_{\infty}^{t_0} \frac{(1-t^2) dt}{t(1+t^2) \sqrt{-\frac{1}{4}t(t^2+1)}},$$

c'est-à-dire l'abscisse de M_1 changée de signe.

Quatrième cas : $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = -1$. — La branche représentative C_4 est symétrique de C_3 par rapport à l'origine.

Finalement, les quatre branches C_1 , C_2 , C_3 , C_4 forment une courbe C admettant Ox et Oy pour axes de symétrie et toutes les courbes de l'énoncé se déduisent de C par des translations parallèles à Ox .

Dans tout ce qui suit, nous ne considérerons que la branche C_1 .

2. Posons

$$u = - \int_{+\infty}^t \frac{dt}{\sqrt{4t(t^2+1)}};$$

la quantité sous le radical étant de la forme

$$4t^3 - g_2t - g_3$$

($g_2 = -4$, $g_3 = 0$; racines $e_1 = i$, $e_2 = 0$, $e_3 = -i$),
l'inversion de cette intégrale elliptique donne

$$t = p(u; -4, 0):$$

quand t varie de 0 à $+\infty$, u décroît de

$$u + \omega + \omega' = u + \omega_2 \quad \text{à} \quad 0.$$

y et x s'expriment en fonction uniforme de u :

$$\frac{y}{a} = \sqrt{\frac{t}{t^2+1}} = \sqrt{\frac{pu - e_2}{(pu - e_1)(pu - e_3)}} = \frac{\frac{\sigma_2}{\sigma}}{\frac{\sigma_1}{\sigma} \frac{\sigma_3}{\sigma}} = \frac{\sigma\sigma_2}{\sigma_1\sigma_3},$$

ou encore

$$\frac{y}{a} = \frac{2t}{\sqrt{4t(t^2+1)}} = 2 \frac{pu}{-p'u}.$$

En décomposant $\frac{1-t^2}{t(1+t^2)}$ en fractions simples, il

vient

$$\begin{aligned}\frac{dx}{a} &= \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-i} - \frac{1}{t+i} \right) \frac{dt}{\sqrt{4t(t^2+1)}} \\ &= \left(\frac{1}{pu-e_2} + \frac{1}{pu-e_1} + \frac{1}{pu-e_3} \right) du.\end{aligned}$$

Or, la formule

$$p(u + \omega_\lambda) - e_\lambda = \frac{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}{pu - e_\lambda},$$

où λ, μ, ν représentent les nombres 1, 2, 3 rangés dans un ordre quelconque, donne

$$\int \frac{du}{pu - e_\lambda} = - \frac{\zeta(u + \omega_\lambda) + e_\lambda u}{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)} + \text{const.}$$

Appliquons aux trois cas différents :

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{pu - e_1} &= \frac{\zeta(u + \omega) + iu}{2} + \text{const.}, \\ \int \frac{du}{pu - e_2} &= -\zeta(u + \omega + \omega') + \text{const.}, \\ \int \frac{du}{pu - e_3} &= \frac{\zeta(u + \omega') - iu}{2} + \text{const.}\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}\frac{x}{a} &= \left(\zeta(u + \omega + \omega') + \frac{\zeta(u + \omega) + \zeta(u + \omega')}{2} \right)_0^u \\ &= -\zeta(\omega + \omega') + \zeta(u + \omega + \omega') \\ &\quad + \frac{-\zeta(\omega) + \zeta(u + \omega)}{2} + \frac{-\zeta(\omega') + \zeta(u + \omega')}{2}.\end{aligned}$$

On peut transformer cette expression à l'aide de la formule

$$\zeta(u + \nu) - \zeta \nu = \zeta u + \frac{1}{2} \frac{p'u - p'\nu}{pu - p\nu},$$

où l'on fait $\nu = \omega_\lambda$,

$$\zeta(u + \omega_\lambda) - \zeta(\omega_\lambda) = \zeta u + \frac{1}{2} \frac{p'u}{pu - e_\lambda};$$

il vient

$$\begin{aligned}\frac{x}{a} &= 2\zeta u + \frac{1}{4} \left(\frac{p'u}{pu - e_1} + \frac{p'u}{pu - e_3} + 2 \frac{p'u}{pu - e_2} \right) \\ &= 2\zeta u + \frac{2p'u(2p^2u + 1)}{4pu(p^2u + 1)} \\ &= 2\zeta u + \frac{2(2p^2u + 1)}{p'u}.\end{aligned}$$

Les expressions définitives de x et y en fonction uniforme de u sont, débarrassées de tout symbole imaginaire,

$$\begin{aligned}x &= 2a \left(\zeta u + \frac{2p^2u + 1}{p'u} \right) \quad (1), \\ y &= a \frac{\sigma\sigma_2}{\sigma_1\sigma_3} = -2a \frac{p'u}{p'u};\end{aligned}$$

de plus y est une fonction elliptique de u .

3. Soit R le rayon de courbure relatif au point M

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dt}{dx}} = (1 + t^2)^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{dt} = \frac{a}{2} \frac{1 - t^2}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

Remplaçons, dans cette expression, t par

$$\begin{aligned}pu - e^2 &= \left(\frac{\sigma_2 u}{\sigma u} \right)^2 : \\ R &= \frac{a}{2} \frac{1 - \frac{\sigma_2^2 u}{\sigma^2 u}}{\frac{\sigma_2^3 u}{\sigma^3 u}} = \frac{a}{2} \frac{\sigma^4 - \sigma_2^4}{\sigma\sigma_2^3}.\end{aligned}$$

(1) L'expression

$$\frac{x}{2a} = \zeta u + \frac{2pu p'u}{4(p^2u + 1)} + \frac{p'u}{2pu},$$

est toute préparée pour l'intégration.

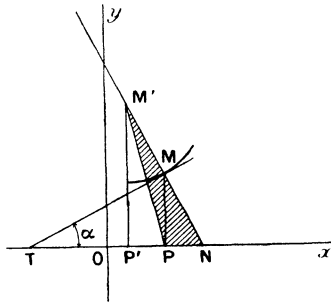
Si l'on veut mettre les zéros en évidence au numérateur, on détermine un argument u_1 tel que $pu_1 = 1$, et un autre u_2 tel que $pu_2 = -1$, et l'on exprime $pu - pu_1$ et $pu - pu_2$ au moyen de la fonction σ

$$\begin{aligned} R &= \frac{a}{2} \frac{1 - p^2 u}{\frac{\sigma^3 u}{\sigma^3 u}} \\ &= -\frac{a}{2} \frac{\sigma(u - u_1) \sigma(u + u_1) \sigma(u - u_2) \sigma(u + u_2)}{\sigma^2 u_1 \sigma^2 u_2 \sigma^2 u \sigma u} . \end{aligned}$$

De toutes manières, R s'exprime en fonction uniforme, mais non elliptique, de u ; on voit aisément que c'est une fonction aux multiplicateurs constants -1 et -1 .

4. Si α désigne l'angle que fait avec Ox (*fig. 4*), la

Fig. 4.



tangente menée dans le sens des t croissants, l'ordonnée de M'

$$\begin{aligned} \overline{P'M'} &= y + R \cos \alpha \\ &= a \sqrt{\frac{t}{t^2 + 1}} + \frac{a}{2} \frac{1 - t^2}{t^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} = a \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{2 t^{\frac{3}{2}}} . \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}\text{aire } M'NP &= \frac{1}{2} PN \times P'M' \\ &= \pm \frac{1}{2} t y \times \overline{P'M'} \\ &= \pm \frac{1}{2} ta \sqrt{\frac{t}{t^2+1}} a \frac{\sqrt{t^2+1}}{2t^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2}{4}.\end{aligned}$$

L'aire $M'NP$ est bien constante et sa valeur est $\frac{a^2}{4}$.

5. Si s désigne l'arc de la courbe compté positivement dans le sens des t croissants, on a

$$\begin{aligned}ds^2 &= dx^2 + dy^2 = (t^2 + 1) dx^2, \\ \frac{ds}{a} &= \pm \frac{1-t^2}{t(1+t^2)} \frac{dt}{\sqrt{4t}} = \pm \left(\frac{1}{t} - \frac{2t}{t^2+1} \right) \frac{dt}{\sqrt{4t}};\end{aligned}$$

on doit prendre le signe $+$ quand $t < 1$, et le signe $-$ quand $t > 1$.

On est ramené à l'intégration d'une fraction rationnelle en posant $t^2 = \theta$. Mais il est aussi simple de tout exprimer en fonction de u :

$$\begin{aligned}\frac{ds}{a} &= \pm \left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} - \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} \right) \frac{dt}{\sqrt{4t(t^2+1)}} \\ &= \pm \left(\frac{\sigma_1 \sigma_3}{\sigma_2^2} - 2 \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1 \sigma_3} \right) du.\end{aligned}$$

En premier lieu,

$$\int \frac{\sigma_1 \sigma_3}{\sigma_2^2} du = \frac{\sigma}{\sigma_2} + \text{const.}$$

Tout revient à calculer $\int \frac{2\sigma_2^2}{\sigma_1 \sigma_3} du$; or les relations

$$(1) \quad \frac{\sigma_1^2}{pu - e_1} = \frac{\sigma_2^2}{pu - e_2} = \frac{\sigma_3^2}{pu - e_3} = \frac{\sigma^2}{1}$$

ou

$$\frac{\sigma_1^2}{pu-i} = \frac{\sigma_2^2}{pu} = \frac{\sigma_3^2}{pu+i} = \frac{\sigma^2}{1}$$

donnent

$$2\sigma_2^2 = \sigma_1^2 + \sigma_3^2,$$

de sorte que

$$\int \frac{2\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_3} du = \int \frac{\sigma_1}{\sigma_3} du + \int \frac{\sigma_3}{\sigma_1} du.$$

On voit aisément que la dérivée logarithmique de $\sqrt{e_3 - e_2} \frac{\sigma}{\sigma_3} + \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$ est $\sqrt{e_3 - e_2} \frac{\sigma_1}{\sigma_3}$, et que celle de $\sqrt{e_1 - e_2} \frac{\sigma}{\sigma_1} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ est $\sqrt{e_1 - e_2} \frac{\sigma_3}{\sigma_1}$; il vient donc, en remplaçant e_1 , e_2 et e_3 par leurs valeurs,

$$\int \frac{2\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_3} du = \frac{1}{\sqrt{-i}} \log \frac{\sqrt{-i}\sigma + \sigma_1}{\sigma_3} + \frac{1}{\sqrt{i}} \log \frac{\sqrt{i}\sigma + \sigma_2}{\sigma_1} + \text{const.}$$

Les relations $\sigma_3^2 = \sigma_2^2 + i\sigma^2$ et $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 - i\sigma^2$ fournies encore par les relations (1) permettent de transformer cette expression

$$\begin{aligned} \int \frac{2\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_3} du &= \frac{1}{2\sqrt{-i}} \log \frac{\sigma_2 + \sqrt{-i}\sigma}{\sigma_2 - \sqrt{-i}\sigma} + \frac{1}{2\sqrt{i}} \log \frac{\sigma_2 + \sqrt{i}\sigma}{\sigma_2 - \sqrt{i}\sigma} + \text{const.} \\ &= \sqrt{-i} \arctan \frac{\sigma_2}{\sqrt{i}\sigma} + \sqrt{i} \arctan \frac{\sigma_2}{\sqrt{-i}\sigma} + \text{const.} \end{aligned}$$

Finalement

$$\arcsin M_0 M = \pm \left(\frac{\sigma}{\sigma_2} - \sqrt{-i} \arctan \frac{\sigma_2}{\sqrt{i}\sigma} - \sqrt{i} \arctan \frac{\sigma_2}{\sqrt{-i}\sigma} \right)_{u=u_0}^u.$$

On est conduit précisément à cette expression en intégrant par les fractions rationnelles et en exprimant ensuite en fonction de u .

L'application de cette formule donne lieu aux re-

marques suivantes. Désignons par A le point de rebroussement ($t = 1$) :

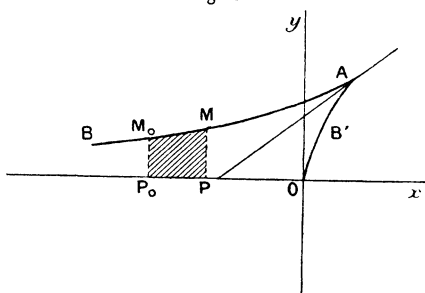
1° Si M_0 et M sont situés tous deux sur la branche infinie AB, on doit prendre le signe — devant le second membre ;

2° Si M_0 et M sont situés tous deux sur la branche AB'O, on prendra le signe + ;

3° Si l'un des deux points est situé sur la branche AB et l'autre sur la branche AB'O, on calculera séparément arc M_0A et arc MA.

6. Les conditions auxquelles M_0 et M sont assujettis par l'énoncé reviennent à ceci : M_0 et M (fig. 5) sont

Fig. 5.



situés tous deux sur la branche AB, ou tous deux sur l'arc AB'O :

$$\begin{aligned}
 \text{aire } P_0 M_0 M P &= \pm \int y \, dx \\
 &= \pm \int a \sqrt{\frac{t}{t^2+1}} \frac{a}{2} \frac{1-t^2}{t(t^2+1)} \frac{dt}{\sqrt{4t(t^2+1)}} \\
 &= \pm \frac{a^2}{4} \int \frac{1-t^2}{t(t^2+1)^2} dt \\
 &= \pm \frac{a^2}{8} \int \frac{(1-\theta) d\theta}{\theta(\theta+1)^2},
 \end{aligned}$$

par le changement de variable $t^2 = \theta$.

Décomposons $\frac{1-\theta}{\theta(\theta+1)^2}$ en fractions simples :

$$\frac{1-\theta}{\theta(\theta+1)^2} = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta+1} - \frac{2}{(\theta+1)^2}.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \text{aire } P_0 M_0 MP &= \pm \frac{a^2}{8} \left(\log \frac{\theta}{\theta+1} + \frac{2}{\theta+1} \right) + \text{const.} \\ &= \pm \frac{a^2}{8} \left(\log \frac{p^2 u}{p^2 u + 1} + \frac{2}{p^2 u + 1} \right)''_{u_0} \\ &= \pm \frac{a^2}{8} \left(\log \frac{\sigma_2^2 u}{\sigma_1^2 \sigma_3^2} + \frac{2 \sigma^4}{\sigma_1^2 \sigma_3^2} \right)''_{u_0} \\ &= \pm \frac{a^2}{4} \left(\log \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1 \sigma_3} + \frac{\sigma^4}{\sigma_1^2 \sigma_3^2} \right)''_{u_0}. \end{aligned}$$