

A. GARBASSO

Formules pour l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires et homogènes

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 2 (1902), p. 549-552

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__549_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[H4j]

**FORMULES POUR L'INTÉGRATION D'UN SYSTÈME
D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ET HOMOGÈNES;**

PAR M. A. GARBASSO,

Privat docent de Physique à l'Université de Turin.

On donne un système de $n + 1$ équations qui renferment, sous une forme linéaire et homogène, $n + 1$ fonctions et leurs dérivées par rapport à une variable x , jusqu'à l'ordre s .

Nous appellerons

$y_1, y_2, \dots, y_v, \dots, y_n$ et z

les fonction inconnues, et désignerons par

$a_{\mu, \nu}, b_{\mu, \nu, \sigma}, c_{\mu}$ et $d_{\mu, \sigma}$

des quantités constantes. Les équations proposées pourront s'écrire sous la forme :

$$(1) \sum_1^n \nu \alpha_{\mu, \nu} y_{\nu} + \sum_1^n \sum_1^s \sigma b_{\mu, \nu, \sigma} \frac{d^{\sigma} y_{\nu}}{dx^{\sigma}} + c_{\mu} z + \sum_1^s \sigma d_{\mu, \sigma} \frac{d^{\sigma} z}{dx^{\sigma}} = 0$$

[$\mu = 1, 2, \dots, (n+1)$].

(550)

Nous posons maintenant, pour abréger,

$$\frac{d}{dx} = D$$

et, par conséquent,

$$\frac{d\sigma}{dx^\sigma} = D^\sigma.$$

Si l'on introduit encore les définitions

$$a_{\mu, \nu} + \sum_1^s b_{\mu, \nu \sigma} D^\sigma = A_{\mu, \nu},$$

$$c_\mu + \sum_1^s b_{\mu, \sigma} D^\sigma = B_\mu,$$

les équations (1) prendront la forme simple

$$(1') \quad \sum_1^n \nu A_{\mu, \nu} \gamma_\nu + B_\mu z = 0.$$

Ce sont là $n + 1$ équations algébriques et linéaires pour les γ_ν . On en tire :

$$(2) \quad \left[\begin{array}{cccccccc} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,\nu-1} & A_{1,\nu} & A_{1,\nu+1} & \dots & A_{1,n} & B_1 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,\nu-1} & A_{2,\nu} & A_{2,\nu+1} & \dots & A_{2,n} & B_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{\mu,1} & A_{\mu,2} & \dots & A_{\mu,\nu-1} & A_{\mu,\nu} & A_{\mu,\nu+1} & \dots & A_{\mu,n} & B_\mu \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n+1,1} & A_{n+1,2} & \dots & A_{n+1,\nu-1} & A_{n+1,\nu} & A_{n+1,\nu+1} & \dots & A_{n+1,n} & B_{n+1} \end{array} \right] z = 0.$$

et il en suit :

$$(3) \quad z = \sum_1^p C_\pi e^{c_\pi x} \quad [p = s(n+1)].$$

Dans la formule (3) les C_π sont des constantes arbi-

traies, et les c_π doivent se déterminer comme racines de l'équation (2), alors qu'on regarde dans cette dernière la lettre D non pas comme le symbole d'une opération, mais bien comme une inconnue.

Cela posé, nous allons considérer les n premières des équations (1') et les résoudre comme des équations algébriques entre les γ_v .

Il s'en tire :

$$\gamma_v = \frac{(-1)^v}{\Delta} \begin{vmatrix} B_1 & A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,v-1} & A_{1,v+1} & \dots & A_{1,n} \\ B_2 & A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,v-1} & A_{2,v+1} & \dots & A_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_\mu & A_{\mu,1} & A_{\mu,2} & \dots & A_{\mu,v-1} & A_{\mu,v+1} & \dots & A_{\mu,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_n & A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,v-1} & A_{n,v+1} & \dots & A_{n,n} \end{vmatrix} z,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{\mu,1} & \dots & A_{\mu,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,n} \end{vmatrix}$$

ou, en substituant à z sa valeur (3),

$$(4) \left\{ \gamma_v = (-1)^v \sum_1^p \pi \frac{C_\pi e^{c_\pi x}}{\Delta(c_\pi)} \right. \\ \times \begin{vmatrix} B_1(c_\pi) & A_{1,1}(c_\pi) & \dots & A_{1,v-1}(c_\pi) & A_{1,v+1}(c_\pi) & \dots & A_{1,n}(c_\pi) \\ B_2(c_\pi) & A_{2,1}(c_\pi) & \dots & A_{2,v-1}(c_\pi) & A_{2,v+1}(c_\pi) & \dots & A_{2,n}(c_\pi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_\mu(c_\pi) & A_{\mu,1}(c_\pi) & \dots & A_{\mu,v-1}(c_\pi) & A_{\mu,v+1}(c_\pi) & \dots & A_{\mu,n}(c_\pi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_n(c_\pi) & A_{n,1}(c_\pi) & \dots & A_{n,v-1}(c_\pi) & A_{n,v+1}(c_\pi) & \dots & A_{n,n}(c_\pi) \end{vmatrix} \cdot$$

Par les notations $\Delta(c_\pi)$, $B_\mu(c_\pi)$ et $A_{\mu,v}(c_\pi)$ on veut indiquer que dans les $A_{\mu,v}$ et B_μ il faut substituer, à tour de rôle, à la place de D les racines c_π .

Les formules (3) et (4) donnent les intégrales cherchées.

Pour la détermination des constantes C_π , il faudra donner les valeurs initiales des γ_v , de z et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $(s - 1)$.