

MAURICE FRÉCHET

Généralisation du théorème de Tissot

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 2
(1902), p. 446-448

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__446_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[P5]

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE TISSOT;

PAR M. MAURICE FRÉCHET,

Élève de l'École Normale supérieure.

THÉORÈME. — *Étant donnée une correspondance PONCTUELLE quelconque entre trois surfaces S_1, S_2, S_3 , il existe EN GÉNÉRAL quatre couples de familles de courbes sur S_1 telles que les angles sous lesquels se coupent deux courbes d'un même couple soient conservés dans la correspondance.*

En effet, nous supposons la correspondance telle qu'on puisse exprimer les coordonnées de trois points

correspondants M_1 sur S_1 , M_2 sur S_2 , M_3 sur S_3 au moyen des deux mêmes paramètres u , v . Soient alors $m_1, m'_1; m_2, m'_2; m_3, m'_3; n, n'$ les valeurs de $\frac{du}{dv}$ pour les tangentes isotropes à S_1 et M_1 , les transformées des tangentes isotropes à S_2 en M_2 et à S_3 en M_3 , et pour les tangentes $M_1T_1, M_1T'_1$, à deux courbes de S_1 passant en M_1 . Soient, de plus, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les angles de $M_1T_1, M_1T'_1$ et des tangentes aux courbes correspondantes. On aura :

$$e^{2i\lambda_1} = (m_1, m'_1, n, n'),$$

$$e^{2i\lambda_2} = (m_2, m'_2, n, n'),$$

$$e^{2i\lambda_3} = (m_3, m'_3, n, n').$$

On peut considérer $m_1, m'_1; m_2, m'_2; m_3, m'_3; n, n'$ comme racines des équations respectives :

$$x^2 - 2p_k x - q_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \quad x^2 - 2x + \beta = 0.$$

En posant

$$r_k = \sqrt{p_k^2 - q_k}, \quad \gamma = \sqrt{x^2 - \beta},$$

on aura

$$(1) \quad e^{2i\lambda_k} = \frac{m_k - n}{m'_k - n} : \frac{m_k - n}{m'_k - n} - 1 + \frac{\gamma r_k \gamma}{(p_k - x)^2 - (r_k - \gamma)^2}.$$

On aura alors les courbes cherchées par les équations

$$e^{i\lambda_1} = e^{i\lambda_2} = e^{i\lambda_3},$$

qui devient, en tenant compte de (1),

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{p_1^2 - p_2^2 - r_2^2 - r_1^2}{r_1 - r_2} = \frac{p_1^2 - p_3^2 - r_3^2 - r_1^2}{r_1 - r_3} \\ = 2x \left(\frac{p_2 - p_1}{r_2 - r_1} - \frac{p_3 - p_1}{r_3 - r_1} \right), \end{cases}$$

$$(3) \quad \frac{(p_1 - x)^2 - r_1^2}{r_1} = \frac{(p_2 - x)^2 - r_2^2}{r_2} = \gamma^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

De (2) on tire *une* valeur de α , et en portant dans (3) on en tire *une* valeur de γ^2 , donc de $\beta = \alpha^2 - \gamma^2$.

D'ailleurs, il n'y a que quatre combinaisons de signes des quantités r_i donnant des systèmes différents de valeurs pour α et β , car on obtient les mêmes expressions de α et β en changeant de signe tous les r_i . A chaque combinaison correspond un seul couple de tangentes, ce qui démontre le théorème.

Il y aura une infinité de couples de familles satisfaisant aux conditions dans le seul cas où la correspondance serait une représentation géographique de l'une des surfaces sur l'une au moins des deux autres.