

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 2
(1902), p. 422-427

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__422_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

I. Démontrer qu'une fonction elliptique $f(u)$ aux périodes $2\omega_1, 2\omega_2$ peut être exprimée :

- 1° Par un quotient de fonctions σ ;
- 2° Par la fonction ζ et ses dérivées;
- 3° Par les fonctions $p u$ et $p' u$.

Les fonctions σ , ζ et p se rapportant au couple de périodes $2\omega_1, 2\omega_2$.

II. On considère deux fonctions de x , u et v , définies par les équations

$$u = \int_0^x \frac{e^{-z} \sin z x}{\sqrt{z}} dz,$$

$$v = \int_0^x \frac{e^{-z} \cos z x}{\sqrt{z}} dz.$$

1° Faire voir qu'elles satisfont à deux équations différentielles du premier ordre, linéaires, sans second membre.

2° Intégrer ce système d'équations linéaires et en déduire les valeurs de deux intégrales définies u et v .

(Lille, juillet 1901.)

SOLUTION.

On a

$$x \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{1}{2}u = 0,$$

$$\frac{du}{dx} - x \frac{dv}{dx} - \frac{1}{2}v = 0.$$

On peut en déduire une équation en v par l'élimination de u . Mais il est préférable de traiter le système par le procédé de d'Alembert. Enfin, si l'on pose $u = \lambda v$, on obtient

$$(\lambda x + 1) \frac{dv}{dx} + v \left(\lambda' x + \frac{1}{2} \lambda \right) = 0,$$

$$(\lambda - x) \frac{dv}{dx} + v \left(\lambda' - \frac{1}{2} \right) = 0;$$

d'où

$$\frac{2\lambda'}{1 + \lambda^2} = \frac{1}{1 + x^2},$$

équation qui s'intègre immédiatement. Comme pour $x = 0$, on a

$$u = 0, \quad \lambda = 0$$

et

$$v = \Gamma \left(\frac{1}{2} \right),$$

on posera

$$x = \tan t,$$

et l'on aura :

$$u = \rho \sin \frac{t}{2},$$

$$v = \rho \cos \frac{t}{2},$$

ρ étant défini par l'une des équations du système. L'intégration

s'achève sans difficulté. On a enfin :

$$\begin{aligned} u &= A \sin \frac{t}{2} \sqrt{\cos t}, & \text{où} & \quad A = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \\ v &= A \cos \frac{t}{2} \sqrt{\cos t}, & \text{»} & \quad t = \arctan x. \end{aligned}$$

I. *Contact de deux courbes dans l'espace; cercle osculateur d'une courbe gauche.*

II. *On considère l'équation différentielle*

$$(1) \quad 4y^2y''' - 18yy'y'' + 15y'^3 = 0,$$

dont le premier membre est, à un facteur près $\varphi(y)$, la dérivée troisième d'une certaine fonction $f(y)$.

1° Déterminer la fonction $f(y)$ et en déduire l'intégrale générale de l'équation (1);

2° Intégrer directement l'équation (1).

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{(x^2+4)^2} dx,$$

où le signe $\log$ désigne un logarithme népérien.

Après avoir donné l'expression de l'intégrale demandée, on en calculera la valeur numérique avec trois décimales.

(Toulouse, juillet 1901.)

I. *Condition pour que les droites $X = AZ + P$, $Y = BZ + Q$ aient une enveloppe. Équation différentielle des lignes de courbure.*

II. *Étant donnés trois axes rectangulaires Ox , Oy , Oz , on considère la courbe (Γ) définie par les formules*

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sin t \cos t, \\ z = \cos^2 t, \end{cases}$$

où t désigne un angle variable.

1° Montrer que la courbe (Γ) est tout entière située sur une sphère (S) ayant pour centre l'origine et qu'elle se projette suivant un cercle sur le plan YOz .

2° La droite polaire d'un point quelconque de (Γ) passe par le point O : soit P l'un des deux points où la droite polaire du point M rencontre la sphère (S) et V l'angle des rayons OM et OP . Vérifier que, si l'on pose

$$u = \sin t,$$

on a

$$\cos V = \frac{u(u^2 - 3)}{\sqrt{8 - 3u^2}}, \quad \sin V = \sqrt{\frac{(2 - u^2)^2}{8 - 3u^2}}.$$

Calculer, pour un point quelconque de (Γ) , les coordonnées du centre de courbure, le rayon de courbure, le rayon de torsion.

3° La courbe, lieu du point P , est la COURBE DE TORSION relative à la courbe (Γ) . Montrer que, si l'on désigne par s et τ les arcs décrits sur la sphère (S) par les points M et P , on a toujours

$$\frac{dV}{ds} = \frac{d\tau}{ds},$$

et que, par suite, la différence $V - \tau$ reste constante quand le point M décrit la courbe (Γ) .

SOLUTION.

1° La courbe (Γ) est tout entière située sur la sphère et sur le cylindre définis par les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad y^2 + z^2 = z;$$

c'est le contour d'une *fenêtre de Viviani*.

Il y a un point double au point $x = 0, y = 0, z = 1$; le cône ayant pour sommet ce point et pour directrice la courbe (Γ) est de révolution autour d'un axe parallèle à Ox ; l'égalité

$$\frac{z - 1}{y} = -\tan t$$

donne l'interprétation géométrique du paramètre t .

2° La courbe (Γ) étant tracée sur une sphère de centre O ,

le plan normal, et par suite la droite polaire, passent constamment par le point O. On a aisément les cosinus directeurs de cette droite polaire OP; on en déduit les valeurs de $\cos V$ et de $\sin V$. Si C est la trace de la droite polaire sur le plan osculateur, C est le centre de courbure de la courbe au point M; ses coordonnées se calculent en remarquant que

$$OC = \cos V.$$

Le rayon de courbure $MC = \sin V$; on a une vérification en se servant de la formule connue

$$\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{s'^3} \quad (A = y'z'' - z'y'', B = \dots).$$

On trouve pour le rayon de torsion T

$$\frac{1}{T} = \frac{6 \cos t}{8 - 3 \sin^2 t}.$$

3° Comme on connaît $\cos V$ et $\sin V$ en fonction de t , pour avoir $\frac{dV}{dt}$ il suffit de différentier les deux membres de la formule qui donne $\cos V$; on en déduit

$$\frac{dV}{ds} = \frac{6 \cos t}{8 - 3 \sin^2 t} = \frac{1}{T}.$$

Or la courbe lieu du point P est la *courbe de torsion* relative à la courbe (Γ); il en résulte

$$\frac{dV}{ds} = \frac{d\tau}{ds} \quad (V - \tau = \text{const.}).$$

Ce résultat est évident géométriquement, si l'on remarque que le point P est le point où le grand cercle normal en M à la courbe (Γ) touche son enveloppe, de sorte que le lieu de P est la développée sphérique de (Γ).

Remarque. — La condition pour que quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 de la courbe (Γ) soient dans un même plan est

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = 1,$$

en posant

$$\lambda = \tan \left(\frac{t}{2} \right)$$

et en désignant par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ les valeurs de λ qui correspondent aux quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 .

III. L'hyperbole équilatère $xy = 1$ et les droites $x = \alpha$, $y = \alpha$ ($0 < \alpha < 1$) déterminent un triangle mixtiligne; calculer l'intégrale curviligne

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) dy$$

étendue à l'arc d'hyperbole formant l'un des côtés du triangle; calculer ensuite, en la transformant en intégrale double, la même intégrale étendue au contour entier du triangle parcouru dans le sens direct.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Sur la parabole représentée, en axes rectangulaires Ox, Oy , par l'équation $y^2 = 4x$, on considère les points $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, dont les abscisses sont $1, \frac{1}{10}, \dots, \frac{1}{10^{n-1}}, \dots$; calculer avec deux chiffres décimaux exacts la somme des cordes

$$OA_1 + OA_2 + \dots + OA_n + \dots$$

On fait tourner autour de la corde A_1B_1 de la parabole, tracée perpendiculairement à Ox par le point d'abscisse 1, le segment de la parabole compris entre cette corde et le sommet; calculer le moment d'inertie par rapport à son axe A_1B_1 du volume de révolution ainsi engendré; la densité est supposée constante et égale à l'unité.

(Nancy, juillet 1901.)