

Certificats d'algèbre supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 2
(1902), p. 322-326

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__322_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE.

I. On considère l'équation du quatrième degré $f(x) = 0$ et les fonctions des racines

$$\varphi_1 = x_1 x_2 + x_3 x_4 \quad \varphi_2 = x_1 x_3 + x_2 x_4, \quad \varphi_3 = x_1 x_4 + x_2 x_3.$$

on forme la fonction

$$\omega_1 = \varphi_2 - \varphi_3 = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4).$$

1° Déterminer le groupe auquel appartient ω_1 , et les valeurs dont est susceptible cette fonction pour toutes les substitutions.

2° Calculer la somme des carrés des valeurs de ω_1 , et montrer que, si elle est nulle, l'invariant S est nul et les racines sont liées par la relation

$$(x_1 - x_2)^2 (x_3 - x_4)^2 + (x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_4) = 0,$$

qu'on peut écrire

$$(x_3 - x_4)^2 = \frac{f'(x_1) f'(x_2)}{(x_1 - x_2)^4}.$$

II. Démontrer les égalités

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} p(u+v) + p(u-v) \\ \quad = \frac{2(pu p v - \frac{1}{4} g_2)(pu + p v) - g_3}{(pu - p v)^2}, \\ p(u+v) - p(u-v) = \frac{-p' u p' v}{(pu - p v)^2}. \end{array} \right.$$

III. On considère la cubique (C) définie par les formules

$$x = p(u | \omega, \omega'), \quad y = p(u | \omega, \omega'),$$

et l'on suppose que la période 2ω est réelle, la période $2\omega'$ purement imaginaire.

1° Déterminer les arguments des points d'inflexion; montrer que la droite qui joint deux des points d'inflexion va passer par un troisième.

2° En partant de l'équation de la cubique (C)

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3,$$

et en égalant à zéro la dérivée seconde de y par rapport à x on obtient, pour déterminer les abscisses des points d'inflexion, une équation du quatrième degré

$$F(x) \equiv ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e;$$

vérifier que l'on a

$$F'(x) = \rho(4x^3 - g_2x - g_3),$$

ρ désignant un facteur numérique.

Étudier la variation du polynome $F(x)$ en supposant que x varie de $-\infty$ à $+\infty$; en conclure le nombre des points d'inflexion réels. Vérifier que l'invariant

$$S = ae - 4bd + 3c^2$$

de $F(x)$ est nul.

3° Montrer que les racines peuvent être représentées par les formules

$$\begin{aligned} x_1 &= p\left(\frac{2\omega}{3}\right), & x_2 &= p\left(\frac{2\omega'}{3}\right), \\ x_3 &= p\left(\frac{2\omega + 2\omega'}{3}\right), & x_4 &= p\left(\frac{2\omega - 2\omega'}{3}\right), \end{aligned}$$

et retrouver, au moyen de cette interprétation, le nombre des points d'inflexion réels.

Vérifier, par un calcul algébrique, que x_1, x_2, x_3, x_4 satisfont aux deux relations

$$\begin{aligned} x_3 + x_4 &= \frac{2(x_1x_2 - \frac{1}{4}g_2)(x_1 + x_2) - g_3}{(x_1 - x_2)^2}, \\ (x_3 - x_4)^2 &= \frac{(4x_1^3 - g_2x_1 - g_3)(4x_2^3 - g_2x_2 - g_3)}{(x_1 - x_2)^4} \\ &= -\frac{(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_1 - x_2)^2} \end{aligned}$$

qui correspondent aux formules (1).

ÉPREUVE PRATIQUE. — Développer, en série entière, la série

$$pu = \frac{1}{u^2} + \sum' \left(\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right);$$

former les dérivées successives de pu ; décomposer p^2u en éléments simples et établir la formule

$$p'^2u = 4p^3u - g_2pu - g_3.$$

Former les relations qui relient les puissances successives de pu aux dérivées successives de cette fonction; intégrer

$$\int_w^u p^3u \, du.$$

(Nancy, juillet 1901.)

1. On considère le produit infini

$$\left(z + \frac{1}{z} \right) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n} z^2) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{q^{2n}}{z^2} \right),$$

où q désigne une constante réelle comprise entre 0 et 1, et z une variable complexe.

1° Montrer que ce produit définit une fonction $\varpi(z)$ jouissant de la propriété

$$\varpi(qz) = \varpi(z) \frac{1}{qz^2};$$

trouver les zéros de la fonction $\varpi(z)$.

2° K et K' étant des quantités réelles et positives, on pose

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}, \quad z = e^{\frac{i\pi u}{2K}},$$

et l'on désigne par $\Pi(u)$ ce que devient la fonction $\varpi(z)$ après cette double substitution.

Indiquer comment se transforme la fonction $\Pi(u)$ quand on ajoute $2K$ ou $2iK'$ à l'argument u ; trouver les zéros de la fonction $\Pi(u)$. Vérifier que l'on a

$$\Pi(u) = 2 \cos \frac{\pi u}{2K} \left(1 + 2q^2 \cos \frac{\pi u}{K} + q^4 \right) \left(1 + 2q^4 \cos \frac{\pi u}{K} + q^8 \right) \dots$$

3° *A quelles conditions doivent satisfaire les coefficients A_m de la série*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m q^{\frac{m^2}{4}} z^m \quad (0 < q < 1)$$

pour que cette série définisse une fonction jouissant de la propriété

$$q z^2 f(qz) \equiv f(z);$$

de cette détermination, déduire le développement

$$\Pi(u) = C \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} \cos(2n+1) \frac{\pi u}{2k},$$

$\Pi(u)$ désignant la fonction précédemment considérée, et C un facteur constant.

II. *On considère l'équation du quatrième degré*

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0,$$

on désigne ses racines par x_1, x_2, x_3, x_4 et l'on prend la fonction de ces racines

$$\rho = x_1 x_2 - x_3 x_4,$$

1° *Déterminer toutes les valeurs que peut acquérir cette fonction pour toutes les substitutions et former le groupe de substitutions auquel appartient la fonction donnée ρ .*

2° *Étant donnée la fonction des racines*

$$\varphi = x_1 x_2 + x_3 x_4,$$

former l'équation dont dépend ρ en fonction de φ , lorsqu'on effectue les substitutions laissant φ invariable. Former inversement l'expression de φ en fonction rationnelle de ρ , et en déduire l'équation dont dépendent toutes les valeurs dont la fonction φ est susceptible en fonction des coefficients a_1, a_2, a_3, a_4 .

3° *En supposant que pour une équation spéciale la fonction ρ soit rationnellement connue, comment achèverait-on les résolutions de l'équation?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Condition de convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$; limite supérieure du reste.*

Étude de la convergence des séries

$$\sum' \frac{1}{(m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \sum' \frac{1}{w^3}, \quad \sum' \frac{1}{(u - w^3)},$$

$$\sum' \left(\frac{1}{(u - w)^2} - \frac{1}{w^2} \right), \quad \sum' \left(\frac{1}{u - w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} \right),$$

où

$$w = 2m\omega + 2n\omega'$$

$m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, m et n non nuls simultanément.

(Nancy, novembre 1901.)