

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 2
(1902), p. 280-282

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__280_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCE.

M. d'Ocagne. — *Sur les faisceaux ponctuels de coniques.*
 — Le théorème que j'ai rencontré précédemment et qu'un élève de Mathématiques spéciales, M. Georges Halley des Fontaines, vient d'utiliser de façon fort ingénieuse pour construire les tangentes aux cubiques planes ⁽¹⁾, peut donner lieu aux remarques géométriques que voici :

Soient O le centre, I un point double d'une involution située sur une droite et dans laquelle A et B sont des points correspondants.

L'égalité de définition

$$\overline{OI}^2 = OA \cdot OB$$

peut s'écrire

$$(QA + AI)(OB - IB) = OA \cdot OB$$

(¹) Même Tome, p. 132. La méthode de M. des Fontaines s'applique particulièrement bien à la cubique qui se rencontre dans le problème d'admission à l'École Polytechnique en 1901.

ou

$$OA \cdot IB = AI(OB - IB) = AI \cdot OI.$$

Élevant au carré et remplaçant $\overline{OI}^2$ par sa valeur ci-dessus, on a

$$\frac{OA}{OB} = \left(\frac{IA}{IB} \right)^2,$$

égalité susceptible de diverses applications. Combinée avec le théorème de Ménélaüs, elle montre immédiatement que *si, sur chaque côté d'un triangle, on considère une involution dans laquelle les sommets se correspondent, et si les centres de ces trois involutions sont en ligne droite, les points doubles de ces involutions sont aussi trois à trois en ligne droite, et réciproquement.*

Considérons, en particulier, un faisceau ponctuel de coniques

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + B_1yz + B_2zx + B_3xy \\ + \lambda(C_1yz + C_2zx + C_3xy) = 0,$$

dont fasse partie une conique

$$C_1yz + C_2zx + C_3xy = 0$$

circonscrite au triangle ABC pris pour triangle de référence. Si nous coupons par l'un des côtés de ce triangle, $z = 0$ par exemple, nous avons l'involution donnée par l'équation

$$A_1x^2 + (B_3 + \lambda C_3)xy + A_2y^2 = 0,$$

dont le centre est défini par la condition que son correspondant est sur la droite de l'infini

$$ax + by + cz = 0,$$

a , b , c étant les côtés du triangle ABC. Le point à l'infini sur AB satisfaisant aux équations

$$z = 0, \quad ax + by = 0,$$

on tire de l'équation ci-dessus, pour son correspondant, centre de l'involution

$$z = 0, \quad \frac{A_1x}{a} + \frac{A_2y}{b} = 0.$$

De même, les centres sur BC et CA sont donnés respectivement par

$$x = 0, \quad \frac{A_2 y}{b} + \frac{A_3 z}{c} = 0$$

et

$$y = 0, \quad \frac{A_3 z}{c} + \frac{A_1 x}{a} = 0.$$

Et l'on voit immédiatement que ces trois points sont alignés sur la droite

$$\frac{A_1 x}{a} + \frac{A_2 y}{b} + \frac{A_3 z}{c} = 0.$$

Il en résulte, en vertu du théorème ci-dessus, que les points doubles des trois involutions sont aussi trois à trois en ligne droite. C'est le théorème qui se trouve appliqué dans la Note rappelée plus haut.
