

MAURICE FRÉCHET

**Sur quelques propriétés de l'hypocycloïde
à trois rebroussements**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 2
(1902), p. 206-217

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__206_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[M^{15b}]

**SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DE L'HYPOCYCLOÏDE
À TROIS REBROUSSEMENTS;**

PAR M. MAURICE FRÉCHET,
Élève de l'École Normale supérieure.

On appelle *hypocycloïde à trois rebroussements* une courbe de troisième classe II, tangente à la droite de l'infini aux deux points cycliques.

Nous l'étudierons en partant du problème suivant :

I. *Trouver l'enveloppe de la droite de Simson PQR relative à un triangle quelconque ABC et à un point variable M.*

Prenons celui-là comme triangle de référence; les équations des droites PQR, MP, MQ, MR seront

$$\begin{aligned} ux + cy + wz &= 0, \\ (v \cos C + w \cos B)x + cy + wz &= 0, \\ ux + (w \cos A + u \cos C)y + wz &= 0, \\ ux + cy - (u \cos B + v \cos A)z &= 0. \end{aligned}$$

Ces trois droites étant concourantes, le déterminant des coefficients $\Delta(u, v, w)$ est nul. L'enveloppe cherchée est donc la courbe de troisième classe $\Delta = 0$. La droite de l'infini est tangente double, car $\Delta'_u, \Delta'_v, \Delta'_w$ sont nuls pour $\frac{u}{\sin A} = \frac{v}{\sin B} = \frac{w}{\sin C}$. L'équation de ses points de contact

$$U^2 \Delta''_{u^2} + V^2 \Delta''_{v^2} + W^2 \Delta''_{w^2} + 2UV \Delta''_{uv} + 2VW \Delta''_{vw} + 2WU \Delta''_{uw} = 0$$

se réduit par un calcul facile à celle des points cycliques.

L'enveloppe des droites de Simson est donc une hypocycloïde à trois rebroussements (1).

On a

$$\Delta(o, o, \omega) = \Delta(\cos A, -\cos B, o) = o.$$

L'enveloppe est donc tangente aux trois côtés et aux trois hauteurs du triangle ABC.

II. Réciproquement toute hypocycloïde à trois rebroussements H peut être considérée d'une infinité de manières comme enveloppe de droites de Simson.

En effet, d'après la définition donnée :

1° L'équation en coordonnées cartésiennes de H est de la forme

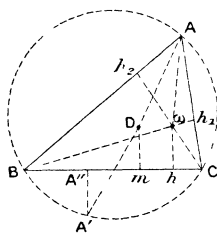
$$(1) \quad (u^2 - v^2)\omega + Au^3 + 3Bu^2v - 3Cuv^2 + Dv^3 = 0;$$

donc il y a une seule hypocycloïde tangente à quatre droites données.

2° Il n'y a qu'une tangente à H qui soit parallèle à une direction donnée.

Soient alors Ah_1 et Ah_2 (fig. 1) deux tangentes quel-

Fig. 1.



conques à une hypocycloïde H, et Bh_1, Ch_2 les deux tan-

(1) Pour une démonstration géométrique de cette propriété, voir, par exemple, E. DUPORCQ, *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements* (*Nouvelles Annales*, avril 1901, p. 168-171).

gentes perpendiculaires. La courbe H aura quatre tangentes communes avec l'enveloppe des droites de Simson relative au triangle ABC ainsi formé; ces deux hypocycloïdes coïncident.

3° Les propriétés que nous allons démontrer sur l'enveloppe des droites de Simson s'appliqueront donc à une hypocycloïde H quelconque.

Lorsque le point M (qui décrit le cercle de centre D circonscrit à ABC) vient au point A' diamétralement opposé à A, la tangente PQR se confond avec BC, et le point P vient en un point A'', projection de A' sur BC. Donc BC est tangente à A en A''. On a

$$\frac{mA''}{mh} = \frac{DA'}{DA} = 1$$

si *m* est le milieu de BC. Donc

$$mA'' = mh,$$

et, d'après la géométrie du triangle, il en résulte que les droites AA'', BB'', CC'' sont concourantes, et il y a une conique inscrite à ABC en A''B''C''. Comme le triangle ABC dépend de deux paramètres quand H est fixe et A variable, il y aura un système doublement infini de coniques S tritangentes à H. L'examen des conditions montre qu'il n'y en a pas d'autres.

4° Les trois normales à H aux points de contact avec une conique S sont les symétriques des hauteurs de ABC, par rapport à D. Ces trois normales sont donc concourantes.

5° Les points A'', *m*, *h* et le point *k* à l'infini sur BC forment une division harmonique; si *x*, *y* sont les coordonnées trilineaires de A'', celles de *m*, *h*, *k* seront

$$\frac{1}{\sin A}, \frac{1}{\sin B}, 0; \quad \frac{1}{\cos A}, \frac{1}{\cos B}, 0; \quad \frac{1}{\sin A}, -\frac{1}{\sin B}, 0;$$

et l'on aura

$$2 \left[\frac{x \cos B}{y \cos A} + \frac{\sin B}{\sin A} \left(-\frac{\sin B}{\sin A} \right) \right] = \left(\frac{x}{y} + \frac{\cos B}{\cos A} \right) \left(\frac{\sin B}{\sin A} - \frac{\sin B}{\sin A} \right),$$

d'où

$$x \sin A \operatorname{tang} A = y \sin B \operatorname{tang} B.$$

De même, pour B'' et C'' ; l'équation de la conique inscrite en A'' , B'' , C'' sera

$$(2) \quad \frac{\sin A \operatorname{tang} A}{u} + \frac{\sin B \operatorname{tang} B}{v} + \frac{\sin C \operatorname{tang} B}{w} = 0.$$

Un calcul immédiat montre que la droite de l'infini a même pôle par rapport à (2) et à

$$(3) \quad \frac{\sin A}{x} + \frac{\sin B}{y} + \frac{\sin C}{z} = 0$$

(équation connue du cercle D circonscrit à ABC). Donc : *le centre d'une conique S tritangente à H coïncide avec le centre du cercle circonscrit au triangle des tangentes communes.*

6° Les coefficients $mm'm''$ des tangentes à H issues d'un point quelconque de coordonnées cartésiennes x, y vérifient, d'après l'équation (1), la relation

$$(4) \quad m^3(A-x) + m^2(y-3B) + m(3C-x) + y - D = 0.$$

Le lieu des points x, y sommets des angles droits circonscrits à H s'obtient au moyen des équations (3), et de

$$m'm'' = -1,$$

d'où

$$m = \frac{m'm''}{m''m''} = \frac{y-D}{A-x}$$

et

$$(5) \quad \begin{cases} 2(x^2 + y^2) - 3(A+C)x \\ - 3(D+B)y + D^2 + 3DB + 3AC + A^2 = 0. \end{cases}$$

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à H est un cercle fixe Γ .

7° Alors dans le triangle A, B, C, les points h, h_1, h_2 sont sur Γ : le *cercle des neuf points du triangle des tangentes communes à S et H est fixe*, ou encore : le *lieu des milieux des côtés du triangle ABC est un cercle Γ* . Le rayon R du cercle circonscrit au triangle des tangentes communes à S et H est constant; car il est double de celui du cercle des neuf points.

8° Le centre D de la conique S est certainement à distance finie. Soient

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = 1 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = R^2$$

les équations en coordonnées cartésiennes de S et du cercle concentrique D. Il y a un triangle inscrit à D et circonscrit à S; en appliquant la condition $\theta'^2 - 4\theta\Delta' = 0$, on trouve

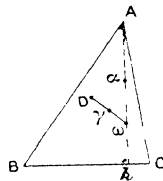
$$R^2 = \alpha + \beta \pm 2\sqrt{\alpha\beta}.$$

Quand la conique S est réelle, R^2 est réel, le produit $\alpha\beta$ est positif; donc S est une ellipse. Soient a et b ses deux demi-axes; on a, en choisissant $a \geq b$,

$$(6) \quad R = a + \varepsilon b \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Soit ω l'orthocentre du triangle ABC (*fig. 2*); le

Fig. 2.



centre γ du cercle des neuf points de ABC est le milieu de $D\omega$. Posons $\gamma\omega = m$; on aura, d'après le théorème de Faure appliqué à S et au cercle conjugué au

triangle ABC (de centre ω et de rayon ρ),

$$(7) \quad a^2 + b^2 = 4m^2 - \rho^2.$$

Or le cercle des neuf points passe par h et par le milieu α de $\Lambda\omega$. On a donc, puisque son rayon est $\frac{R}{2}$,

$$\overline{\omega\alpha} \cdot \overline{\omega h} = m^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2,$$

et, comme

$$(8) \quad \begin{aligned} \rho^2 &= \overline{\omega\Lambda} \cdot \overline{\omega h}, \\ \rho^2 &= 2m^2 - \frac{R^2}{2}. \end{aligned}$$

Des formules (6), (7) et (8) on tire

$$(9) \quad ab = \varepsilon \left[\left(\frac{R}{2}\right)^2 - m^2 \right].$$

Donc le produit des demi-axes de S est égal à la valeur absolue de la puissance de son centre D par rapport au cercle fixe Γ . De plus $-\varepsilon$ est, d'après (9), du signe de cette puissance, et l'on conclut d'après (6) que :

Lorsque le centre de S est à l'intérieur du cercle fixe Γ , la somme des demi-axes est constante et égale au diamètre de Γ ; lorsque D est à l'extérieur de Γ , c'est la différence qui remplace la somme.

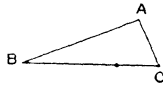
9° Les formules (6) et (9) montrent que l'on a

$$a = R, \quad b = 0$$

lorsque le centre de S est sur Γ . Alors la conique S se réduit à un segment de droite de longueur $2R$ dont le milieu est sur Γ . Au point de vue tangentiel, c'est un ensemble de deux points B, C ayant trois tangentes

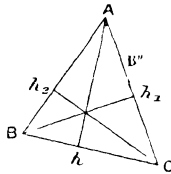
communes avec S . Il faut donc que ces trois tangentes soient BC et deux droites passant l'une en B , l'autre en C (*fig. 3*). Dans ce cas le triangle ABC devient tan-

Fig. 3.



gent en B et C à S (*fig. 1*); le point B'' (*fig. 4*) vient en C ; donc $\Delta h_1 = B''C = 0$ et, par conséquent, h_1 venant en A .

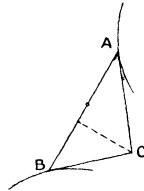
Fig. 4



la hauteur issue de B est AB : l'angle BAC est droit.

On peut voir ceci autrement : on peut prendre AC et AB arbitrairement. Laisant la tangente quelconque AB fixe, faisons tendre AC vers la tangente à H en l'un des points d'intersection de H et AB (*fig. 5*). Alors les

Fig. 5.



deux tangentes Ah et AC se confondent, et par conséquent aussi les deux tangentes *perpendiculaires* Bh_1 et BC ; donc B est sur H . Le triangle ABC devient rectangle en C : le côté $AB = 2R$, puisqu'alors le cercle

inscrit à AB pour diamètre; le milieu de AB est encore sur Γ .

Ainsi, la portion d'une tangente quelconque à H, interceptée par H est constante; le milieu de ce segment décrit Γ ; les tangentes aux extrémités sont rectangulaires.

10° On tire des formules (6) et (9)

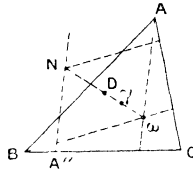
$$m = \frac{a - \varepsilon b}{2}.$$

Donc le lieu des centres des coniques S de grandeur constante est un cercle concentrique à Γ .

On peut considérer ces coniques S comme les diverses positions, dans un plan fixe Q, d'une ellipse S_1 invariable dans un plan mobile q .

Elles ont pour enveloppe H; donc le centre instantané de rotation sera le point de concours N (fig. 6)

Fig. 6.



des normales communes à S et H. On a

$$N\gamma = 3D\gamma = \frac{3}{2}(a - \varepsilon b) \quad \text{et} \quad ND = 2D\gamma = a - \varepsilon b.$$

Donc les distances du point N au point D fixe dans le plan mobile (D centre de S_1) et au point γ fixe dans le plan fixe (γ centre de Γ) sont constantes et les points N, D, γ sont en ligne droite. Donc le lieu de N est un cercle de centre D et de rayon $a - \varepsilon b$ dans q , et un cercle de centre γ et de rayon $\frac{3a - \varepsilon b}{2}$ dans le plan fixe.

L'enveloppe d'une ellipse d'axes $2a$ et $2b$ invariablement liée à un cercle concentrique de rayon $a - \varepsilon b$ roulant sur un cercle C de rayon $\frac{3}{2}(a - \varepsilon b)$ est une hypocycloïde à trois rebroussements.

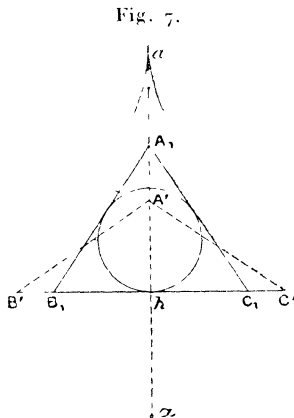
11° Les normales $A''N$, $B''N$, $C''N$ sont homothétiques des hauteurs du triangle ABC par rapport au point fixe γ . Les hauteurs de ABC sont tangentes à H .

La développée d'une hypocycloïde H est une autre hypocycloïde homothétique de la première par rapport à γ dans le rapport -3 .

12° Lorsque le centre D de S vient en γ , on a

$$a = b = \frac{R}{2};$$

donc le cercle γ est tritangent à H (fig. 7). Le cercle



des neuf points doit alors se confondre avec le cercle inscrit, pour le triangle $A_1B_1C_1$ relatif à Γ . Donc celui-ci est équilatéral. Si, d'un point A' d'une hau-

teur $A_1 h$ du triangle $A_1 B_1 C_1$, on mène deux autres tangentes à H rencontrant $B_1 C_1$ en B' et C' , le cercle Γ sera le cercle des neuf points du triangle $A'B'C'$; donc ces tangentes sont symétriques par rapport à $A_1 h$:

Les hauteurs du triangle $A_1 B_1 C_1$ sont trois axes de symétrie de H .

En prenant pour axes $A_1 h$ et $h C_1$, l'équation de H prend la forme réduite

$$(10) \quad \omega(u^2 + v^2) + 2Ruv = 0.$$

13° Le cercle D circonscrit à $A'B'C'$ coupe $A'h$ en un point α tel que $\alpha A' = 2R$, diamètre de D . Lorsque A' tend vers le point a tel que $ah = 2R$, α vient en h ; donc aussi B' et C' ; les tangentes $A'B'$, $A'h$, $A'C'$ sont alors confondues :

Les axes de symétrie de H sont aussi ses tangentes de rebroussements et les points de rebroussements sont sur un cercle Γ' concentrique à Γ et de rayon triple.

14° En appliquant la proposition (10°) dans le cas où $b = 0$, on ramène finalement à la proposition bien connue :

L'hypocycloïde à trois rebroussements est le lieu d'un point d'un cercle qui roule intérieurement dans un cercle de rayon triple.

15° On satisfait à l'équation (10) en posant

$$(11) \quad \frac{u}{1+t^2} = \frac{v}{t(1+t^2)} = -\frac{\omega}{2Rt}.$$

Les t des tangentes communes à H et à une courbe

quelconque de classe m

$$\begin{aligned}
& (\Lambda_0^0 u^m + \Lambda_0^1 u^{m-1} + \dots + \Lambda_0^m v^m) \\
& + w(\Lambda_1^0 u^{m-1} + \dots) + w^2(\dots) + \dots + \Lambda_m^0 w^m = 0
\end{aligned}$$

sont racines d'une équation de la forme

$$(12) \quad f^{3m} - T_1 f^{3m-1} - T_2 f^{3m-2} - \dots = 0.$$

où

$$\begin{aligned}
\rho T_1 &= \Lambda_0^1 - \rho R \Lambda_1^0, \\
\rho T_3 &= \Lambda_0^3 + m \Lambda_0^1 - \rho R [\Lambda_1^2 + (m-1)\Lambda_0^1] + (-2R)^2 \Lambda_2^2, \\
\rho T_5 &= \dots
\end{aligned}$$

D'où, par un calcul facile qui repose sur l'identité $(1-1)^p = 0$, on tire

$$\rho(T_1 - T_3 + T_5 - T_7 + \dots) = 0.$$

Soit alors φ_i l'angle avec Ox de l'une des tangentes T_i définies par (12); la relation précédente devient

$$(13) \quad \varphi_1 - \varphi_2 + \dots + \varphi_{3m} = 0,$$

le signe \equiv indiquant l'égalité à un multiple de π près.

D'ailleurs, toute courbe de classe m tangente à $3m - 1$ tangentes d'une courbe de troisième classe est tangente à une tangente fixe de cette dernière courbe. Ainsi la relation (13) est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une courbe de classe m tangente aux $3m$ tangentes T_1, \dots, T_{3m} à H .

16° On en déduit, par exemple : la condition pour que trois tangentes à H soient les tangentes communes à H et à une conique S tritangente

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \equiv \frac{\pi}{2}$$

montre bien que celle-ci dépend de deux paramètres et

qu'on peut choisir arbitrairement deux des tangentes communes.

17° *Les tangentes à H, issues des points de contact de H et de la conique S triplement tangente, sont concourantes; car leurs paramètres φ'_i donnés par les équations*

$$2\varphi_1 - \varphi'_1 = 0$$

satisfont à la relation

$$\varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_3 = 0,$$

si l'on a

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{\pi}{2}.$$

18° Soit φ_n la tangente à H menée par le point de contact de la tangente φ_{n-1} . Avec des déterminations convenables de ces angles on aura

$$-2\varphi_{n-1} = \varphi_n, \quad \text{d'où} \quad \varphi_n = (-2)^n \varphi.$$

Si l'on prend $\varphi = \frac{k\pi}{1 - (-2)^n}$, on aura

$$\varphi = \varphi_n + k\pi.$$

Donc il existe un ou plusieurs polygones de n côtés à la fois inscrits et circonscrits à H.

Par exemple, pour $n = 3$, on a le triangle

$$\varphi = \frac{\pi}{9}, \quad \varphi_1 = -\frac{2\pi}{9}, \quad \varphi_2 = \frac{4\pi}{9}$$

et son symétrique par rapport à une tangente de rebroussement. En prenant ce triangle comme triangle de référence, l'équation de H prend la forme

$$A \frac{u}{v} + B \frac{v}{w} + C \frac{w}{u} + D = 0.$$
