

C. MALTÉZOS

Sur la chute des corps dans le vide et sur certaines fonctions transcendantes

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 2 (1902), p. 197-204

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__197_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[R8cβ]

**SUR LA CHUTE DES CORPS DANS LE VIDE ET SUR CERTAINES
FONCTIONS TRANSCENDANTES;**

PAR M. C. MALTÉZOS,
Professeur à l'École militaire, Athènes.

1. Les équations différentielles de la chute des corps
dans le vide, sans vitesse initiale, en tenant compte du

mouvement de rotation de la Terre, sont

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = -2\omega \sin \lambda \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = 2\omega \left(\sin \lambda \frac{dx}{dt} + \cos \lambda \frac{dz}{dt} \right), \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = g - 2\omega \cos \lambda \frac{dy}{dt}, \end{cases}$$

en prenant pour axe des x la méridienne, dirigée vers le nord, pour axe des y une perpendiculaire dans le plan horizontal, dirigée vers l'est, et pour axe des z la verticale de l'origine, dirigée vers le bas. λ représente la latitude, et ω la rotation.

En intégrant on obtient les équations

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2\omega y \sin \lambda, \\ \frac{dy}{dt} = 2\omega (x \sin \lambda + z \cos \lambda), \\ \frac{dz}{dt} = gt - 2\omega y \cos \lambda. \end{cases}$$

La troisième s'écrit à l'aide de la première

$$\frac{dz}{dt} = gt + \cot \lambda \frac{dx}{dt},$$

d'où

$$(3) \quad z = \frac{1}{2}gt^2 + x \cot \lambda.$$

En remplaçant dans la deuxième, on obtient

$$\frac{dy}{dt} = g\omega t^2 \cos \lambda + \frac{2\omega x}{\sin \lambda},$$

et

$$(4) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 2g\omega t \cos \lambda - 4\omega^2 y.$$

Cette équation admet comme solution la seconde des

équations

$$(5) \quad \begin{cases} x = \frac{g \sin \lambda \cos \lambda}{4 \omega^2} (1 - 2 \omega^2 t^2 - \cos 2 \omega t), \\ y = \frac{g \cos \lambda}{4 \omega^2} (2 \omega t - \sin 2 \omega t). \end{cases}$$

La déviation x , comme d'ailleurs il est bien connu, est très petite et moindre que y .

On peut trouver z d'une autre manière, par une approximation plus que suffisante. Nous avons, en effet, l'équation

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = g - 4 \omega^2 \cos \lambda (x \sin \lambda + z \cos \lambda).$$

En négligeant le terme $4 \omega^2 x \cos \lambda \sin \lambda$ devant les autres, on obtient

$$(6) \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = g - \varphi^2 z \quad (\varphi^2 = 4 \omega^2 \cos^2 \lambda).$$

En intégrant, on trouve l'équation

$$(7) \quad z = \frac{g}{\varphi^2} (1 - \cos \varphi t),$$

pour laquelle les deux premiers termes du second membre (en t^2 et t^1) sont les mêmes que ceux de l'équation (3), à laquelle elle devient exactement identique pour l'équateur.

Remarque. — Si la hauteur de la chute est assez grande, en supposant variable l'intensité de l'accélération, on obtient, dans le cas où z est assez petit devant R (en désignant par R le rayon terrestre terminé à l'origine et g l'accélération à l'origine),

$$(8) \quad z = \frac{g}{\varphi^2} \frac{e^{\varphi t} + e^{-\varphi t} - 2}{2},$$

avec

$$\varphi^2 = \frac{2g}{R} - 4 \omega^2 \cos^2 \lambda.$$

2. Si l'on pose

$$C_1 = \cos \varphi t = \cos \psi, \quad C_2 = 1.2 \frac{1 - C_1}{\varphi^2 t^2} = 1.2 \frac{1 - C_1}{\psi^2},$$

l'équation (7) peut s'écrire

$$z = C_2 \frac{g t^2}{2}.$$

La courbe $C_2 = 1.2 \frac{1 - \cos \psi}{\psi^2}$ est symétrique par rapport à l'axe des C , qu'elle rencontre à la distance 1 de l'origine, où elle passe par un maximum. Cette courbe possède une série de minima et maxima.

Les minima sont donnés par l'équation

$$\sin \frac{\psi}{2} = 0,$$

d'où

$$\psi = 2m\pi \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

et les maxima par l'équation

$$\tan \frac{\psi}{2} = \frac{\psi}{2}.$$

Les fonctions C_1 , C_2 peuvent être généralisées. Posons, en effet,

$$\begin{aligned} C_k &= 1 - \frac{\psi^2}{(2k-1)2k} + \frac{\psi^4}{(2k-1)2k(2k+1)(2k+2)} - \dots \\ &= (2k-3)(2k-2) \frac{1 - C_{k-1}}{\psi^2}. \end{aligned}$$

Ces équations représentent des courbes rencontrant l'axe des ordonnées à la distance 1 de l'origine, où elles passent par un maximum, et elles sont symétriques autour de l'axe des C .

Pour toute valeur réelle de ψ (différente de zéro), on a

$$0 \leq C_2 < C_3 < \dots < C_k < 1$$

(C_2 seule s'annule aux minima).

Les fonctions C possèdent la propriété de vérifier la condition

$$\begin{aligned} C_1(x) - \frac{x^2}{1.2} C_2(x) + \frac{x^4}{1.2.3.4} C_3(x) - \dots \\ = C_1(z) - \frac{x^2}{1.2} C_2(z) + \frac{x^4}{1.2.3.4} C_3(z) - \dots \end{aligned}$$

L'équation différentielle de C_k est

$$\begin{aligned} \frac{d^2 C_k}{d\psi^2} + \frac{4(k-1)}{\psi} \frac{dC_k}{d\psi} \\ + \left[1 + \frac{(2k-3)(2k-2)}{\psi^2} \right] C_k = \frac{(2k-3)(2k-2)}{\psi^2}. \end{aligned}$$

On peut lui donner la forme plus générale

$$(9) \quad \frac{d^2 u}{d\psi^2} + \frac{\alpha}{\psi} \frac{du}{d\psi} + \left(\beta + \frac{\gamma}{\psi^2} \right) u = \frac{\delta}{\psi^2},$$

dont la solution est

$$(10) \quad u = A_0 + A_2 \psi^2 + A_4 \psi^4 + \dots + A_{2m} \psi^{2m} + \dots;$$

avec

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\delta}{\gamma}, \\ A_2 &= -\beta \frac{A_0}{1.2 + 2\alpha + \gamma}, \\ A_4 &= (-\beta)^2 \frac{A_0}{(1.2 + 2\alpha + \gamma)(3.4 + 4\alpha + \gamma)}, \\ &\dots\dots\dots, \\ A_{2m} &= (-\beta)^m \frac{A_0}{(1.2 + 2\alpha + \gamma)(3.4 + 4\alpha + \gamma) \dots [(2m-1)2m + 2m\alpha + \gamma]}, \end{aligned}$$

la série (10) est rapidement convergente, quand α et γ sont positifs.

Cas particuliers. — D'autres cas remarquables de u sont les suivants :

α . Posons $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$; on obtient

alors

$$u = A_0 \left[1 - \frac{\psi^2}{2^2} + \frac{\psi^4}{2^2 4^2} - \dots + (-1)^m \frac{\psi^{2m}}{2^2 4^2 \dots 2m^2} + \dots \right],$$

où A_0 désigne une constante arbitraire. On a donc

$$u = A_0 J_0;$$

J_0 désignant la première des fonctions de Bessel.

b. Posons de même $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -(2n)^2$, $\delta = 0$; on trouve

$$A_0 = A_2 = A_4 = \dots = A_{2n-2} = 0, \quad A_{2n} = \frac{0}{0},$$

c'est-à-dire une constante arbitraire, qu'on peut écrire

$$A_{2n} = B = \frac{B}{2^{2n} (2n)!};$$

on a donc finalement

$$u = \frac{B \psi^{2n}}{2^{2n} (2n)!} \left[1 - \frac{\psi^2}{2(4n+2)} + \frac{\psi^4}{2.4(4n+2)(4n+4)} - \dots \right] = BJ_{2n}(\psi).$$

Les fonctions *paires* de Bessel sont donc des cas particuliers de u .

3. De même qu'on a déduit du cosinus des fonctions plus générales, on peut en déduire d'autres du sinus. Posons, en effet,

$$s_1 = \psi - \frac{\psi^3}{2.3} + \frac{\psi^5}{2.3.4.5} - \dots = \sin \psi,$$

$$s_2 = \psi - \frac{\psi^3}{4.5} + \frac{\psi^5}{4.5.6.7} - \dots = 2.3 \frac{\psi - s_1}{\psi^2} \quad (1),$$

.....,

$$s_k = \psi - \frac{\psi^3}{2k(2k+1)} + \frac{\psi^5}{2k(2k+1)(2k+2)(2k+3)} - \dots \\ = (2k-2)(2k-1) \frac{\psi - s_{k-1}}{\psi^2},$$

(1) Les maxima et minima de s_2 s'obtiennent par les équations $\cos \frac{\psi}{2} = 0$, d'où $\psi = (2m+1)\pi$ pour les maxima, et $\tan \frac{\psi}{2} = \frac{\psi}{2}$

s_k vérifiant l'équation

$$\frac{d^2 s_k}{d\psi^2} + \frac{4(k-1)}{\psi} \frac{ds_k}{d\psi} + \left[1 + \frac{(2k-2)(2k-3)}{\psi^2} \right] s_k = \frac{(2k-1)(2k-2)}{\psi}.$$

Et, en généralisant,

$$(11) \quad \frac{d^2 v}{d\psi^2} + \frac{\alpha}{\psi} \frac{dv}{d\psi} + \left(\beta + \frac{\gamma}{\psi^2} \right) v = \frac{\delta}{\psi},$$

dont la solution est la suivante :

$$(12) \quad v = A_1 \psi + A_2 \psi^3 + \dots + A_{2m+1} \psi^{2m+1} + \dots,$$

avec

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\delta}{2\beta + \gamma}, \\ A_3 &= -\beta \frac{A_1}{2\beta + 3\alpha + \gamma}, \\ &\dots\dots\dots, \\ A_{2m+1} &= (-\beta)^m \frac{A_1}{(2\beta + 3\alpha + \gamma)(4\beta + 5\alpha + \gamma) \dots [2m(2m+1) + (2m+1)\alpha + \gamma]}. \end{aligned}$$

Cas particulier. — Posons

$$\alpha = \beta = 1, \quad \gamma = -(2n+1)^2, \quad \delta = 0;$$

on aura alors

$$A_1 = A_3 = \dots = A_{2n-1} = 0, \quad A_{2n+1} = \frac{0}{0},$$

ce qui est la constante arbitraire, qu'on peut écrire

$$A_{2n+1} = B' = \frac{B}{2^{2n+1}(2n+1)!},$$

pour les minima, excepté la valeur $\psi = 0$, car, à l'origine, la courbe possède un point d'inflexion, avec une tangente bissectrice de l'angle positif des axes. Il est à remarquer que les abscisses des minima de s_2 sont les mêmes que celles des maxima de C_2 .

(204)

et l'on aura

$$v = \frac{B\psi^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!} \left\{ 1 - \frac{\psi^2}{2[(2n+1)2+2]} + \dots \right\} = BJ_{2n+1}(\psi).$$

Les fonctions *impaires* de Bessel sont donc des cas particuliers de v .