NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES HALLEY DES FONTAINES

Sur les cubiques planes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 132-136

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__132_1>

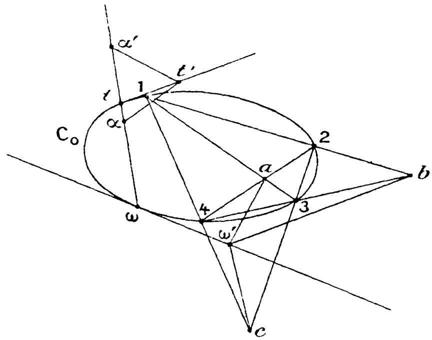
[$M^1 5g$]

SUR LES CUBIQUES PLANES;

PAR M. GEORGES HALLEY DES FONTAINES,
Élève de Mathématiques spéciales
au collège Chaptal.

1. Soient dans le plan cinq points fixes, ω, 1, 2, 3, 4. On sait que le lieu des points de contact des tangentes menées de ω à toutes les coniques C qui passent par 1, 2, 3 et 4 est une cubique Γ, passant par ω et touchant

aux points 1, 2, 3 et 4 les droites ω_1, ω_2, ω_3, ω_4. Cette cubique passe évidemment par les sommets a, b, c du triangle conjugué commun aux coniques C. Remarquons



enfin que, si α et α' désignent deux points de Γ en ligne droite avec ω, ces points sont les points doubles de l'involution déterminée sur $\omega\alpha\alpha'$ par les coniques C : par suite, ils sont conjugués à toutes ces coniques, et se correspondent, par conséquent, dans la transformation du second ordre (α, α'), qui admet pour points doubles les points 1, 2, 3 et 4. La cubique Γ est donc le lieu des points α tels que la droite $\alpha\alpha'$ passe par ω.

Réciproquement, toute cubique Γ est susceptible de la génération précédente et cela d'une infinité de manières : il suffit de prendre pour ω un point quelconque de Γ, et pour points 1, 2, 3 et 4 les points de contact des tangentes menées à cette courbe par ω. On obtient ainsi une infinité de transformations du second ordre transformant Γ en elle-même, de sorte que la droite joignant deux points correspondants, α et α', de Γ passe par un point fixe de cette courbe.

2. Un théorème de M. d'Ocagne va nous permettre

de déterminer les tangentes à Γ aux points α et α' : il s'agit de la propriété suivante :

Les points doubles des involutions déterminées par les coniques C *d'un faisceau ponctuel sur les côtés d'un triangle inscrit à l'une,* C_0, *de ces coniques, sont trois à trois en ligne droite.*

Soit donc C_0 la conique (1234ω) : c'est évidemment la conique polaire de ω par rapport à Γ : soient t et t_1 les points où cette conique coupe deux sécantes $\omega\alpha\alpha'$ et $\omega\alpha_1\alpha'_1$ issues de ω, et qui rencontrent respectivement Γ en α, α' et α_1, α'_1. En appliquant la propriété que nous venons de rappeler, au triangle $\omega t t_1$, inscrit à C_0, et en faisant tendre t_1 vers t, on voit que, à la limite, les tangentes à Γ en α et α' couperont la tangente en t à C_0 en un même point t' qui sera le transformé de t dans la transformation du second ordre envisagée tout à l'heure.

3. Dans le cas particulier où les points 3 et 4, par exemple, viendraient à coïncider avec un même point, p, ce point serait double sur Γ. Dans ce cas, l'une des coniques C est formée des droites p_1 et p_2, de sorte que $p\alpha$ et $p\alpha'$ sont conjuguées harmoniques par rapport à ces droites; elles le sont aussi par rapport aux droites $p\omega$ et pt, puisque α et α', conjugués à la conique C_0, divisent harmoniquement la corde pt. Or, quand t tend sur C_0 vers le point p, $p\alpha$ et $p\alpha'$ deviennent les tangentes au point double : celles-ci seront donc conjuguées à la fois au couple p_1, p_2 et au couple formé par $p\omega$ et la tangente en p aux coniques C.

On voit donc que, si les coniques C étaient osculatrices en p, Γ aurait un rebroussement en ce point, la tangente de rebroussement étant la tangente commune aux coniques C.

4. La construction précédemment indiquée pour la tangente en α tombe en défaut, lorsque la droite $\omega\alpha$ devient la tangente en ω à Γ et, par suite, à C_0 ; dans ce cas, en effet, α et t se confondent au point ω' où Γ coupe à nouveau sa tangente $\omega\omega'$ en ω.

Mais, dans ce cas, on voit aisément que le point ω' est aussi sur les tangentes à Γ aux points a, b, c, sommets du triangle diagonal du quadrangle 1234. La conique $(abc\,\omega\omega')$ est donc la conique polaire du point ω', et elle a donc, en ω', même tangente que Γ.

5. Examinons, en particulier, le cas où le faisceau des coniques C comprend un cercle O de centre ω, c'est-à-dire celui où les points 1, 2, 3 et 4 sont équidistants de ω. On voit que α et α' se correspondent alors dans l'inversion de pôle ω et dont le module a pour valeur le carré du rayon du cercle O. Par suite, Γ est anallagmatique par rapport au pôle ω. Les points a, b et c sont alors les trois autres pôles d'anallagmatie, et ω' est le point à l'infini de la cubique.

On en déduit aisément une construction linéaire de l'asymptote réelle de Γ.

6. La construction de la tangente à la cubique, donnée précédemment (n° 2) fournit immédiatement la propriété suivante :

Si une sécante pivote autour d'un point fixe ω *d'une cubique* Γ, *les tangentes menées à* Γ *aux deux points variables d'intersection se coupent en un point dont le lieu est une courbe unicursale du quatrième ordre :*

cette courbe se déduit de la conique polaire de ω *par la transformation du second ordre qui admet pour points doubles les points de contact des tangentes à* Γ *issues de* ω.

Les trois points doubles du lieu sont d'ailleurs les points a, b, c, considérés tout à l'heure.

Par exemple, si Γ est anallagmatique, et ω un des pôles d'anallagmatie, les trois points doubles du lieu seront les trois autres pôles d'anallagmatie.