

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 1
(1901), p. 44-47

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__44_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 525.

(1860, p. 234.)

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ les racines d'une équation

$$f(x) = 0,$$

que nous écrirons sous la forme

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)(x, 1)^n = 0.$$

Posons

$$A_m = (-1)^m a_0^{n-2} \sum \frac{x_1^m f'(x_2) f'(x_3) \dots f'(x_n)}{f'(x_1)},$$

où f' est la dérivée de f ; démontrer que la forme

$$\varphi = (A_0, A_1, A_2, \dots, A_{2n-4})(x, y)^{2n-4},$$

est un covariant de la forme

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)(x, y)^n \quad (1).$$

(MICHAEL ROBERTS.)

SOLUTION

Par M. A. BOULANGER.

Soit la forme

$$f(x, y) = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_2 x^{n-2} y^2 + \dots \\ + n a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n,$$

ou, avec la notation abrégée de Cayley,

$$(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)(x, y)^n.$$

(1) L'énoncé des *Nouvelles Annales* est incorrect; il doit y avoir alternance de signe des A. L'énoncé transcrit ici est *exact*.

Tout covariant $\varphi(x, y, a_0, a_1, \dots, a_n)$ de f vérifie les équations aux dérivées partielles

$$(1) \quad \begin{cases} y \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + 3 a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} + \dots + n a_{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}, \\ x \frac{\partial \varphi}{\partial y} = a_n \frac{\partial \varphi}{\partial a_{n-1}} + 2 a_{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{n-2}} + \dots + n a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_0}. \end{cases}$$

Réciproquement, si la fonction entière $\varphi(x, y, a_0, \dots, a_n)$, homogène séparément par rapport aux variables et aux coefficients, satisfait identiquement aux équations (1), elle sera un covariant de $f(x, y)$. (Cayley, 1855; voir la démonstration de Brioschi, *Annali di Matematica*, 1858.)

Soit

$$\varphi = A_0 x^p + p A_1 x^{p-1} y + \frac{p(p-1)}{1.2} A_2 x^{p-2} y^2 + \dots + A_p y^p,$$

cette fonction où les A sont de formes de même degré en $a_0, a_1, \dots, a_n$; la condition de vérification du système (1) en $x, y, a_0, a_1, \dots, a_n$ équivaut à celle du système suivant, en $a_0, a_1, \dots, a_n$

$$(2) \quad \begin{cases} a_0 \frac{\partial A_m}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial A_m}{\partial a_2} + 3 a_2 \frac{\partial A_m}{\partial a_3} + \dots + n a_{n-1} \frac{\partial A_m}{\partial a_n} = m A_{m-1}, \\ n a_1 \frac{\partial A_m}{\partial a_0} + (n-1) a_2 \frac{\partial A_m}{\partial a_1} + \dots + a_n \frac{\partial A_m}{\partial a_{n-1}} = m A_{p-m+1} \end{cases}$$

($m = 0, 1, 2, \dots, p$).

Ces propriétés rappelées, le théorème à établir est immédiat. Soit

$$f(x, 1) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n);$$

comme

$$f'(x_i, 1) = a_0(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n),$$

les coefficients de la forme φ de l'énoncé s'écrivent

$$A_m = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2} + m} a_0^{2n-4} \sum x_1^m (x_2 - x_3)^2 \dots (x_{n-1} - x_n)^2;$$

comme $m \leq 2n - 4$, la fonction symétrique entière mise en évidence, où chaque racine a pour exposant maximum $2n - 4$,

est, à $\frac{1}{a_0^{2n-4}}$ près, une forme de degré $(2n-4)$ en a_0 , $a_1, \dots, a_n$; A_m est donc une telle forme.

Il suffit dès lors de vérifier que les A_m vérifient les équations (2). A cet effet, utilisons la substitution

$$x = x' + hy', \quad y = y',$$

qui transforme la forme $(a_0, a_1, \dots, a_n)(x, y)^n$ en la forme $(a'_0, a'_1, \dots, a'_n)(x', y')^n$, avec

$$(3) \quad a'_i = a_i + ia_{i-1}h + \frac{i(i-1)}{1.2}a_{i-2}h^2 + \dots + ia_1h^{i-1} + a_0h^i \\ (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Pour cette nouvelle forme, on a

$$A_m(a'_0, a'_1, \dots, a'_n) \\ = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2} + m} a_0^{2n-4} \sum x_1^m (x'_2 - x'_3)^2 \dots (x'_{n-1} - x_n)^2,$$

$x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ étant les racines de $(a'_0, a'_2, \dots, a'_n)(x', 1) = 0$, c'est-à-dire $x_1 - h, x_2 - h, \dots$; donc la relation

$$A_m(a'_0, a'_1, \dots, a'_n) \\ = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2} + m} a_0^{2n-4} \sum (x_1 - h)^m (x_2 - x_3)^2 \dots (x_{n-1} - x_n)^2$$

sera, après remplacement des a'_i par leurs valeurs (3), une identité en h ; si l'on développe le premier membre par la formule de Taylor en regardant a_i comme valeur initiale de a'_i , on reconnaît immédiatement, par l'identification des termes du premier degré en h , que les A_m vérifient la première série des équations (2).

La seconde série des équations (2) sera évidemment vérifiée si l'on démontre que l'échange dans $f(x, y)$ des coefficients équidistants des extrêmes échange entre eux dans φ les coefficients A équidistants des extrêmes. Or la substitution

$$x = y', \quad y = x'$$

transforme $f(x, y)$ en $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)(x', y')$, forme

pour laquelle on a

$$\begin{aligned}
 & \Lambda_m(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0) \\
 &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+m} a_n^{2n-4} \sum \frac{1}{x_1^m} \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} \right)^2 \dots \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n} \right)^2 \\
 &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+m} \frac{a_n^{2n-4}}{(x_1, x_2, \dots, x_n)^{2n-4}} \sum x_1^{2n-4-m} (x_2 - x_3)^2 \dots (x_{n-1} - x_n)^2 \\
 &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+m} a_0^{2n-4} \sum x_1^{(2n-4)-m} (x_2 - x_3)^2 \dots (x_{n-1} - x_n)^2 \\
 &= \Lambda_{(2n-4)-m}(a_0, a_1, \dots, a_n).
 \end{aligned}$$

Le théorème est donc établi.