

A. VACQUANT

**Agrégation des sciences mathématiques
(concours de 1900). Solution analytique
et géométrie de la question de
mathématiques spéciales**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 1
(1901), p. 416-426

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__416_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS
DE 1900). SOLUTION ANALYTIQUE ET GÉOMÉTRIQUE DE
LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;**

PAR M. A. VACQUANT,
Professeur au lycée de Nancy.

1° L'équation du cône C est

$$Ax^2 + 2Byz = 0.$$

En désignant par α, β, γ les paramètres directeurs de la droite D et par x_1 l'abscisse de son point de rencontre avec OX, les équations de D sont

$$\frac{x - x_1}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \rho.$$

L'équation d'une surface S tangente au cône C en tous les points d'une courbe plane est de la forme

$$Ax^2 + 2Byz + \lambda(ux + vy + wz + h)^2 = 0.$$

La droite D devant être située sur S, l'équation sui-

vante en ρ doit être identique

$$A(x_1 + \alpha\rho)^2 + 2B\xi\gamma\rho^2 + \lambda[ux_1 + h + \rho(u\alpha + v\beta + w\gamma)]^2 = 0.$$

D'où

$$A\alpha^2 + 2B\beta\gamma + \lambda(u\alpha + v\beta + w\gamma)^2 = 0,$$

$$A\alpha x_1 + \lambda(ux_1 + h)(u\alpha + v\beta + w\gamma) = 0,$$

$$Ax_1^2 + \lambda(ux_1 + h)^2 = 0.$$

Ces trois relations s'écrivent

$$\frac{A\alpha^2 + 2B\beta\gamma}{A\alpha x_1} = \frac{u\alpha + v\beta + w\gamma}{ux_1 + h} = \frac{\alpha}{x_1}, \quad \lambda = \frac{-Ax_1^2}{(ux_1 + h)^2}.$$

Les deux premières simplifiées sont

$$(1) \quad 2B\beta\gamma = 0.$$

$$(2) \quad x_1(v\beta + w\gamma) - \alpha h = 0.$$

La relation (1) signifie que la droite D doit être, soit dans le plan xOy pour $\gamma = 0$, soit dans xOz pour $\beta = 0$, c'est-à-dire, dans l'un ou l'autre cas, *tangente au cône*.

La relation (2) exprime que la droite D perce le plan $x = 0$ sur la droite d'intersection $x = 0$, $v\gamma + wz + h = 0$ du plan yOz et du plan de la conique de raccordement de S et de C. Dans le cas où la droite D est dans le plan xOy elle rencontrera donc Oy en un point I appartenant à cette conique.

2° Supposons $\gamma = 0$, D est dans le plan xOy . Pour trouver le lieu géométrique des centres des surfaces S, on élimine u, v, w, λ, h entre les équations

$$(2)' \quad v\beta x_1 - \alpha h = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{v}{\alpha} = \frac{h}{\beta x_1},$$

$$\lambda = -\frac{Ax_1^2}{(ux_1 + h)^2},$$

$$Ax + \lambda uR = 0, \quad Bz + \lambda vR = 0, \quad B\gamma + \lambda wR = 0,$$

en posant $R \equiv ux + v\gamma + wz + h$.

Ces équations s'écrivent

$$\frac{Ax}{u} = \frac{Bz}{v} = \frac{By}{w} = -\lambda R = \frac{Ax_1^2 (ux + vy + wz + h)}{(ux_1 + h)^2}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} u &= v \frac{Ax}{Bz}, & w &= \frac{vy}{z}, \\ ux + vy + wz + h &= \frac{vAx^2}{Bz} + 2vy + h, \\ ux_1 + h &= \frac{vAx_1}{Bz} + h, \\ \frac{Bz}{v} &= \frac{Ax_1^2 (Avx^2 + 2Bvyz + Bhz)Bz}{(Avxx_1 + Bhz)^2}. \end{aligned}$$

Remplaçant, dans cette équation homogène en v et h , v par α et h par βx_1 , on a, après suppression du facteur $x_1^2 Bz$,

$$(A\alpha x + B\beta z)^2 = A\alpha(A\alpha x^2 + 2B\alpha yz + B\beta x_1 z).$$

Développant et supprimant le facteur Bz , on obtient

$$(P) \quad 2A\alpha(\beta x - \alpha y) + B\beta^2 z - A\alpha\beta x_1 = 0$$

pour l'équation du plan P .

La trace du plan P sur le plan xOy , savoir

$$\beta x - \alpha y - \frac{\beta x_1}{2} = 0,$$

est une droite δ parallèle à D et équidistante de D et de O .

De plus, le plan

$$2A\alpha(\beta x - \alpha y) + B\beta^2 z = 0,$$

parallèle à P en passant par O , est tangent au cône C , comme on le vérifie aisément; de sorte que P est parallèle au deuxième plan tangent au cône C parallèle à la droite D (le premier étant xOy); le plan P est ainsi défini géométriquement.

3° Quand la droite D se déplace dans le plan xOy de façon que le plan P passe par un point donné $A(x_0, y_0, z_0)$, on a

$$(3) \quad 2A\alpha(\beta x_0 - \alpha y_0) + B\beta^2 z_0 - A\alpha\beta x_1 = 0.$$

Les coordonnées de plan P sont

$$u = 2A\alpha\beta, \quad v = -2A\alpha^2, \quad w = B\beta^2, \quad h = -A\alpha\beta x_1.$$

L'élimination de α, β donne

$$\alpha^2 \beta^2 = \frac{u^2}{4A^2} = -\frac{vw}{2AB}$$

ou

$$Bu^2 + 2Avw = 0;$$

c'est l'équation tangentielle du cône C de sommet O. Donc le plan P enveloppe le cône parallèle à C de sommet A. Ce résultat était évident d'après la définition géométrique de P.

La droite D du plan xOy a pour équation

$$\beta x - \alpha y - \beta x_1 = 0$$

ou, en tirant x_1 de la relation (3),

$$A\alpha(\beta x - \alpha y) - 2A\alpha(\beta x_0 - \alpha y_0) - B\beta^2 z_0 = 0.$$

Ordonnant cette équation par rapport à α, β , elle s'écrit

$$A\alpha^2(2y_0 - y) + A\alpha\beta(x - 2x_0) - B\beta^2 z_0 = 0,$$

d'où immédiatement l'équation de l'enveloppe de D

$$A^2(x - 2x_0)^2 + 4ABz_0(2y_0 - y) = 0$$

ou

$$(x - 2x_0)^2 = \frac{4Bz_0}{A}(y - 2y_0).$$

C'est l'équation d'une parabole Q passant par le point O' de coordonnées $(2x_0, 2y_0)$; la tangente en ce point est parallèle à Ox; les diamètres sont parallèles à Oy.

4° Le paramètre p de la parabole Q est donné par la formule

$$p = \pm \frac{2Bz_0}{A} \sin^2 \theta,$$

en désignant par θ l'angle des axes Ox , Oy ; si p est donné, z_0 est connu et a pour valeur $\frac{\rho A}{2B \sin^2 \theta}$ ou cette valeur changée de signe; le lieu de A se compose donc de deux plans parallèles au plan xOy et équidistants de ce plan.

5° Soient

$$(\pi) \quad u_0 x + v_0 y + w_0 z + 1 = 0$$

l'équation d'un plan quelconque π et

$$Ax^2 + 2Byz + \lambda(ux + vy + wz + 1)^2 = 0$$

celle des surfaces S qui lui sont tangentes; on a vu (1°)

$$\lambda = \frac{-Ax_1^2}{(ux_1 + 1)^2}, \quad \frac{\rho}{\alpha} = \frac{1}{\beta x_1}.$$

J'ai supposé $h_0 = h = 1$ pour simplifier un peu les calculs.

Les coordonnées (x, y, z) du point de contact M du plan π et d'une surface S satisfont aux équations

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{Ax + \lambda u R}{u_0} = \frac{Bz + \lambda v R}{v_0} = \frac{By + \lambda w R}{w_0} = \lambda R \\ (R \equiv ux + vy + wz + 1; u_0 x + v_0 y + w_0 z + 1 = 0). \end{array} \right.$$

On obtient un deuxième lieu de M (le premier étant le plan π) en éliminant u et w entre les équations (4) qu'on peut écrire

$$\frac{Ax}{u - u_0} = \frac{Bz}{v - v_0} = \frac{By}{w - w_0} = -\lambda R.$$

(421)

D'où

$$u - u_0 = \frac{Ax}{Bz} (v - v_0),$$

$$w - w_0 = \frac{y}{z} (v - v_0),$$

$$\begin{aligned} \frac{Bz}{v - v_0} &= \frac{Ax_1^2}{(ux_1 + 1)^2} (ux + vy + wz + 1) \\ &= \frac{Ax_1^2}{(ux_1 + 1)^2} [(u - u_0)x + (v - v_0)y + (w - w_0)z] \end{aligned}$$

ou

$$-(ux_1 + 1)^2 \frac{Bz}{v - v_0} = Ax_1^2 \left(\frac{Ax^2}{Bz} + 2y \right) (v - v_0)$$

ou

$$\begin{aligned} [(u - u_0)x_1 + u_0x_1 + 1]^2 B^2 z^2 &= Ax_1^2 (Ax^2 + 2Byz)(v - v_0)^2, \\ [Ax_1(v - v_0) + (u_0x_1 + 1)Bz]^2 &= Ax_1^2 (v - v_0)^2 (Ax^2 + 2Byz). \end{aligned}$$

En développant et supprimant le facteur Bz , on obtient

$$(\pi_1) \quad \begin{cases} 2A(v - v_0)x_1[(u_0x_1 + 1)x - (v - v_0)x_1y] \\ + (u_0x_1 + 1)^2 Bz = 0 \end{cases}$$

avec

$$v = \frac{\alpha}{\beta x_1}.$$

Le lieu des points de contact $M(x, y, z)$ est donc la droite Δ définie par les équations (π) et (π_1) . Le plan π_1 est celui qui passe par Δ et l'origine O . Si l'on pose

$$\frac{u_0x_1 + 1}{(v - v_0)x_1} = \rho,$$

l'équation (π_1) s'écrit

$$(\pi_1)' \quad Bz\rho^2 + 2Ax\rho - 2Ay = 0.$$

L'enveloppe de ce plan qui passe par O est le cône

$$A^2x^2 + 2AByz = 0,$$

c'est-à-dire le cône C . Donc la droite Δ est tangente au

cône C. L'équation (π_1) s'écrit encore

$$\gamma \Lambda (v - v_0) x_1 [x_1 (u_0 x + v_0 y) + x - v x_1 y] \\ + (u_0 x_1 + 1)^2 B z = 0.$$

Pour tous les points de Δ , on a

$$u_0 x + v_0 y = -(w_0 z + 1).$$

Comme $v x_1 = \frac{\alpha}{\beta}$, la droite Δ est donc située dans le plan π_2 représenté par l'équation

$$\gamma \Lambda (v - v_0) x_1 \left[-x_1 (w_0 z + 1) + x - \frac{\alpha}{\beta} y \right] \\ + (u_0 x_1 + 1)^2 B z = 0$$

ou

$$(\pi_2) \quad \begin{cases} \gamma \Lambda (v - v_0) x_1 \left(x - x_1 - \frac{\alpha}{\beta} y \right) \\ + [B(u_0 x_1 + 1)^2 - \gamma \Lambda x_1^2 (v - v_0) w_0] z = 0. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$\mu = \frac{B(u_0 x_1 + 1)^2 - \gamma \Lambda x_1^2 w_0 (v - v_0)}{\gamma \Lambda (v - v_0) x_1},$$

l'équation (π_2) s'écrit

$$(\pi_2)' \quad x - x_1 - \frac{\alpha}{\beta} y + \mu z = 0.$$

Les équations de la droite D étant

$$\frac{x - x_1}{\alpha} = \frac{y}{\beta}, \quad z = 0,$$

on voit que le plan π_2 contient la droite D et, par suite, la droite Δ rencontre la droite D.

Ainsi les droites Δ s'appuient sur D et sont tangentes au cône C.

Quand le plan π se déplace arbitrairement dans l'espace, les droites Δ , représentées par les équations $(\pi_1)'$ et $(\pi_2)'$, forment la congruence des droites s'appuyant

sur D en restant tangentes au cône C ; les deux paramètres arbitraires sont ρ et μ .

Les équations $(\pi_1)'$ et $(\pi_2)'$ montrent que par un point quelconque ω de l'espace il passe *deux* droites Δ qui sont d'ailleurs les tangentes, issues de ω , à la section du cône C par le plan défini par la droite D et le point ω .

Quand Δ se déplace dans un plan π' passant par D , comme Δ reste tangente au cône C , le plan π qui passe par Δ enveloppe la section du cône par le plan π' . Ce résultat est d'ailleurs facile à établir analytiquement.

Soit

$$(\pi') \quad x - x_1 - \frac{\alpha}{\beta} y + k z = 0$$

l'équation du plan π' passant par D . D'après l'équation (π_2) on doit avoir, entre la constante k et les coordonnées u_0 , v_0 , w_0 du plan π , la relation

$$B(u_0 x_1 + 1)^2 - 2A x_1^2 w_0 (v - v_0) = k \cdot 2A (v - v_0) x_1$$

ou

$$B(u_0 x_1 + 1)^2 + 2A (v_0 - v) x_1 (w_0 x_1 + k) = 0,$$

c'est-à-dire, en remplaçant v par $\frac{\alpha}{\beta x_1}$,

$$B\beta(u_0 x_1 + 1)^2 + 2A(v_0 \beta x_1 - \alpha)(w_0 x_1 + k) = 0.$$

C'est l'équation tangentielle d'une conique située dans le plan des trois points $(x_1, 0, 0)$, $(0, -\frac{\beta x_1}{\alpha}, 0)$, $(0, 0, \frac{x_1}{k})$ appartenant au plan π' , et située aussi sur le cône C , car, en annulant la variable d'homogénéité dans l'équation de cette conique, on obtient :

$$B\beta u_0^2 x_1^2 + 2A\beta x_1^2 v_0 w_0 = 0$$

ou

$$B u_0^2 + 2A v_0 w_0 = 0,$$

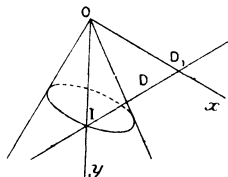
c'est-à-dire l'équation tangentielle du cône C .

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Tous les résultats précédents s'obtiennent aisément par la Géométrie.

1° Le plan défini par le point O et la droite D est tangent à la surface S et par suite au cône C , de sommet O , circonscrit à cette surface (*fig. 1*); donc la droite D est

Fig. 1.

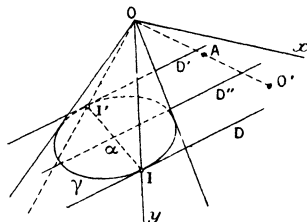


dans un plan tangent au cône C ; comme elle rencontre Ox en un point D_1 , elle sera dans un des plans tangents au cône C passant par la droite Ox , c'est-à-dire dans le plan xOy ou le plan xOz . Supposons la droite D située dans le plan xOy ; elle touche le cône en un certain point de Oy , soit I , qui est aussi le point de contact avec la surface S du point tangent xOy ou (O, D) ; donc la droite D perce le plan de raccordement de S et C sur Oy .

2° Je considère la génératrice D' de la surface S parallèle à D (*fig. 2*); le plan (D, D') coupe le cône C suivant une conique γ tangente en I à D et tangente aussi à D' , car le plan (O, D') est tangent à la surface S et au cône C en un même point I' de D' ; or le plan IOI' conjugué de D dans le cône est fixe, quand D est fixe; donc OI' est une droite fixe. Dans le plan (D, D') asymptote de la surface S , la droite D'' , équidistante de D et D' , contient le centre de la surface S ; on peut remar-

quer aussi que D'' contient le centre α de la conique γ , car ce centre est le milieu de Π' . La droite D'' reste donc dans un plan P parallèle au plan $O'I'D'$ et équidistant de ce plan et de D . La trace de P sur le plan xOy est une

Fig. 2.



droite δ , parallèle à D et équidistante de O et de D . Ce plan P , lieu des droites D'' qui contiennent les centres des surfaces S , est aussi le lieu de ces centres; car si l'on considère une surface S_1 se raccordant avec C le long d'une conique γ_1 passant par I et I' , son centre décrit D'' quand γ_1 varie.

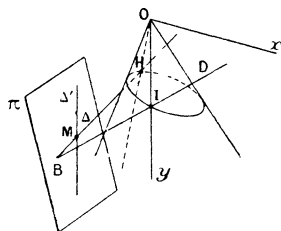
3° Si le plan P passe par un point donné A , il enveloppera un cône parallèle à C , de sommet A . Le plan passant par D et parallèle au plan (O, D') coupe la droite fixe OA en un point O' qui est fixe, car $AO' = OA$, de sorte que le plan (O', D) enveloppe un cône C' parallèle à C , de sommet O' ; la droite D , mobile dans le plan xOy enveloppe donc la section de ce cône C' par le plan xOy ; celui-ci étant tangent au cône C est parallèle à un plan tangent au cône C' ; donc la section est une parabole Q dont les diamètres sont parallèles à Oy .

4° Le paramètre de cette parabole ne dépend que de la distance du point O' et par suite du point A au plan xOy ; donc le paramètre restera constant quand le point A restera à une distance constante de xOy , c'est-

à-dire décrira deux plans parallèles à xOy et équidistants de ce plan.

5° Soit B le point de rencontre de la droite D et du plan π (fig. 3); le plan π tangent à une surface S la

Fig. 3.



coupe suivant deux génératrices Δ, Δ' dont l'une Δ passe par B. Le plan (O, Δ) est tangent au cône et passe par le point B; donc il est fixe : c'est le deuxième plan tangent au cône C (le premier étant xOy) passant par B. La droite Δ étant l'intersection de deux plans fixes, π et (O, Δ) , est fixe. Le point de contact M de S et π étant sur Δ , le lieu de M, quand S varie, est cette droite Δ . On voit que Δ s'appuie sur D et est tangente au cône C.

Quand le plan π se déplace arbitrairement dans l'espace, les droites Δ forment la congruence des droites qui s'appuient sur D et sont tangentes au cône.

Par un point quelconque ω de l'espace, il passe deux droites Δ qui sont les tangentes, issues de ω , à la section du cône C par le plan (ω, D) .

Quand Δ se déplace dans un plan π' passant par D, comme Δ reste tangente au cône, le plan π , passant par D, enveloppe la section du cône par le plan π' .