

Application de la méthode de Grassmann à une démonstration de deux théorèmes de géométrie différentielle

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 1
(1901), p. 414-416

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__414_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[B12c]

**APPLICATION DE LA MÉTHODE DE GRASSMANN A UNE
DÉMONSTRATION DE DEUX THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE
DIFFÉRENTIELLE;**

PAR UN ANONYME.

La méthode de Grassmann conduit très aisément aux théorèmes suivants démontrés par M. C. Lamioni dans le numéro de décembre des *Nouvelles Annales* :

1° *Si une ligne de courbure est géodésique elle est plane;*

2° *Chaque ligne géodésique plane est de courbure.*

Un point P fonction de deux variables indépendantes u et v appartient à une surface; u et v étant exprimées en fonction d'un paramètre, la variation de ce paramètre entraîne le déplacement de P le long d'une courbe de la surface.

Soient : T le vecteur unité parallèle à la tangente à

cette courbe, N la normale principale, B la binormale ; soit enfin n le vecteur unité normal à la surface en P .

La condition qui exprime que P décrit une ligne géodésique est la suivante ⁽¹⁾ :

$$(1) \quad nNT = 0,$$

en prenant comme paramètre la longueur de l'arc décrit et dérivant il vient

$$\frac{dn}{ds} NT + n \frac{dN}{ds} T + nN \frac{dT}{ds} = 0,$$

ou en tenant compte des formules de Frenet :

$$(2) \quad \frac{dn}{ds} NT + \frac{1}{\tau} nTB = 0.$$

Supposons que cette ligne géodésique soit de courbure, nous aurons comme condition :

$$(3) \quad n \frac{dn}{ds} T = 0;$$

mais la relation (1), qui exprime que n , N et T sont coplanaires, peut se mettre sous la forme

$$n = \alpha N + \beta T,$$

par suite (3) devient

$$\frac{dn}{ds} NT = 0,$$

et comparée à (2) donne finalement

$$\frac{1}{\tau} nTB = 0, \quad \frac{1}{\tau} = 0,$$

car nTB est forcément différent de zéro. La ligne proposée est donc bien plane.

⁽¹⁾ Voir HENRI FEHR, *Application de la méthode vectorielle de Grassmann à la Géométrie infinitésimale* (Thèse).

Inversement supposons que la ligne géodésique soit plane; on a successivement

$$\frac{dn}{ds} \mathbf{NT} = 0,$$

$$\mathbf{N} = \alpha \frac{dn}{ds} + \beta \mathbf{T},$$

$$n \mathbf{NT} = \alpha \frac{dn}{ds} n \mathbf{T} = 0,$$

$$n \frac{dn}{ds} \mathbf{T} = 0,$$

qui exprime qu'elle est de courbure.